メイン講義

スタディサプリ 共通テスト直前対策講座 数学ⅡＢについて

この講座は，大学入学共通テストおよびセンター試験の「過去問題」を通じて，みなさんの実力をチェックし，底上げをするというコンセプトで作りました。この講座を見る頃は，おそらくほぼ全員の人が共通テストの過去問題を解いたことがあるでしょう。では，今一度，次のことを思い返してください。

・いつその過去問題を解きましたか？　まだ実力が伴っていない時期ではないですか？
・どのようなやり方で解きましたか？　今でも同じ解法を取りますか？
・解き直しをしましたか？　それぞれの大問は最後まで解き切りましたか？

１つでも「あ……」と思った人，この講座は，そんなあなたのためにあります。

あなたの「今の」実力が，大学入学共通テストがあなたに要求している資質・能力に対し，どこまで到達していて，どの部分が上回っているのか，または下回っているのか，あなたの予習と動画講義を通じてチェックすることで，あなたの実力が分野毎に整理されます。到達している，または上回っていれば，あとは演習あるのみ，そうでなければ，各分野を見直す最後のチャンスです。

直前期だからこそできる，「あなたの課題」の発見と克服。この講座に，得点アップのカギが隠されています。あなたならではのそのカギを発見してください。

山内　恵介

— 目次 —

第１講　図形と方程式・三角関数
第２講　指数関数・対数関数
第３講　微分法・積分法
第４講　数列
第５講　ベクトル

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから動画講義に臨んでください。講義は予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　図形と方程式・三角関数

1 座標平面上で，直線 $3x+2y-39=0$ を ℓ_1 とする。また，k を実数とし，直線 $kx-y-5k+12=0$ を ℓ_2 とする。

(1) 直線 ℓ_1 と x 軸は，点 (アイ ，0) で交わる。

また，直線 ℓ_2 は k の値に関係なく点 (ウ ， エオ) を通り，直線 ℓ_1 もこの点を通る。

(2) 2 直線 ℓ_1，ℓ_2 および x 軸によって囲まれた三角形が**できないような** k の値は

$k=$ カ ，$\dfrac{\text{キク}}{\text{ケ}}$

である。

（次ページに続く。）

(3)　2 直線 ℓ_1，ℓ_2 および x 軸によって囲まれた三角形ができるとき，この三角形の周および内部からなる領域を D とする。さらに，r を正の実数とし，不等式 $x^2+y^2 \leqq r^2$ の表す領域を E とする。

直線 ℓ_2 が点 $(-13,\ 0)$ を通る場合を考える。このとき，$k=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。さらに，D が E に含まれるような r の値の範囲は

$r \geqq \boxed{\text{シス}}$

である。

次に，$r=\boxed{\text{シス}}$ の場合を考える。このとき，D が E に含まれるような k の値の範囲は

$k \geqq \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ または $k < \dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$

である。

2　θ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。

(1)　$\tan\theta=-\sqrt{3}$ のとき，$\theta=$ **ア** であり

$\cos\theta=$ **イ**，$\sin\theta=$ **ウ**

である。

一般に，$\tan\theta=k$ のとき

$\cos\theta=$ **エ**，$\sin\theta=$ **オ**

である。

ア の解答群

⓪ $-\dfrac{\pi}{3}$	① $-\dfrac{\pi}{4}$	② $-\dfrac{\pi}{6}$	③ $\dfrac{\pi}{6}$	④ $\dfrac{\pi}{4}$	⑤ $\dfrac{\pi}{3}$

イ，**ウ** の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② -1
③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	④ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
⑥ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{2}$	⑧ $-\dfrac{1}{2}$

エ，**オ** の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\dfrac{1}{1+k^2}$	① $-\dfrac{1}{1+k^2}$	② $\dfrac{k}{1+k^2}$	③ $-\dfrac{k}{1+k^2}$
④ $\dfrac{2}{1+k^2}$	⑤ $-\dfrac{2}{1+k^2}$	⑥ $\dfrac{2k}{1+k^2}$	⑦ $-\dfrac{2k}{1+k^2}$
⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	ⓐ $\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$	ⓑ $-\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

（次ページに続く。）

(2)　花子さんと太郎さんは，関数のとり得る値の範囲について話している。

花子：$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で θ を動かすとき，$\tan\theta$ のとり得る値の範囲は実数全体だよね。

太郎：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ だけど，分子を少し変えるとどうなるかな。

$\dfrac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=p$，$\dfrac{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{7}\right)}{\cos\theta}=q$ とおく。

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で θ を動かすとき，p のとり得る値の範囲は **カ** であり，q のとり得る値の範囲は **キ** である。

カ の解答群

⓪ $-1<p<1$	① $0<p<1$
② $-2<p<2$	③ $0<p<2$
④ 実数全体	⑤ 正の実数全体

キ の解答群

⓪ $-1<q<1$	① $0<q<1$
② $-2<q<2$	③ $0<q<2$
④ 実数全体	⑤ 正の実数全体
⑥ $-\sin\dfrac{\pi}{7}<q<\sin\dfrac{\pi}{7}$	⑦ $0<q<\sin\dfrac{\pi}{7}$
⑧ $-\cos\dfrac{\pi}{7}<q<\cos\dfrac{\pi}{7}$	⑨ $0<q<\cos\dfrac{\pi}{7}$

（次ページに続く。）

(3)　α は $0 \leqq \alpha < 2\pi$ を満たすとし

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta}=r$$

とおく。$\alpha=\frac{\pi}{7}$ の場合，r は(2)で定めた q と等しい。

α の値を一つ定め，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で θ のみを動かすとき，r のとり得る値の範囲を考える。

r のとり得る値の範囲が q のとり得る値の範囲と異なるような α $(0 \leqq \alpha < 2\pi)$ は [ク]。

[ク] の解答群

⓪ 存在しない	① ちょうど1個存在する
② ちょうど2個存在する	③ ちょうど3個存在する
④ ちょうど4個存在する	⑤ 5個以上存在する

3　座標平面上の原点を中心とする半径１の円周上に３点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\mathrm{R}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ がある。ただし，$0 \leqq \theta < \alpha < \beta < 2\pi$ とする。このとき，s と t を次のように定める。

$$s = \cos\theta + \cos\alpha + \cos\beta,\quad t = \sin\theta + \sin\alpha + \sin\beta$$

(1)　△PQR が正三角形や二等辺三角形のときの s と t の値について考察しよう。

考察１

△PQR が正三角形である場合を考える。

この場合，α，β を θ で表すと

$$\alpha = \theta + \frac{\boxed{\text{ア}}}{3}\pi,\quad \beta = \theta + \frac{\boxed{\text{イ}}}{3}\pi$$

であり，加法定理により

$$\cos\alpha = \boxed{\text{ウ}},\quad \sin\alpha = \boxed{\text{エ}}$$

である。同様に，$\cos\beta$ および $\sin\beta$ を，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表すことができる。

これらのことから，$s = t = \boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	① $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$
② $\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$
④ $-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$
⑥ $-\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑦ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$

（次ページに続く。）

考察２

△PQR が PQ＝PR となる二等辺三角形である場合を考える。

例えば，点 P が直線 $y=x$ 上にあり，点 Q，R が直線 $y=x$ に関して対称であるときを考える。このとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である。また，α は $\alpha<\dfrac{5}{4}\pi$，β は $\dfrac{5}{4}\pi<\beta$ を満たし，点 Q，R の座標について，$\sin\beta=\cos\alpha$，$\cos\beta=\sin\alpha$ が成り立つ。よって

$$s=t=\frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

である。

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

である。したがって

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{12}\pi,\quad \beta=\frac{\boxed{\text{シス}}}{12}\pi$$

のとき，$s=t=0$ である。

（次ページに続く。）

(2)　次に，s と t の値を定めたときの θ，α，β の関係について考察しよう。

考察３

$s=t=0$ の場合を考える。

この場合，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ により，α と β について考えると

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

同様に，θ と α について考えると

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であるから，θ，α，β の範囲に注意すると

$$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$$

という関係が得られる。

（次ページに続く。）

(3)　これまでの考察を振り返ると，次の⓪～③のうち，正しいものは［テ］であることがわかる。

［テ］の解答群

⓪　△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

①　△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であるが，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

②　△PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があるが，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

③　△PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があり，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

第２講　指数関数・対数関数

1　c を正の定数として，不等式

$$x^{\log_3 x} \geqq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

3 を底とする①の両辺の対数をとり，$t=\log_3 x$ とおくと

$$t^{\boxed{ア}} - \boxed{イ}\,t + \boxed{イ}\log_3 c \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

$c=\sqrt[3]{9}$ のとき，①を満たす x の値の範囲を求めよう。②により

$t \leqq \boxed{ウ}$，$t \geqq \boxed{エ}$

である。さらに，真数の条件を考えて

$\boxed{オ} < x \leqq \boxed{カ}$，$x \geqq \boxed{キ}$

となる。

（次ページに続く。）

次に，①が $x>$ [オ] の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求めよう。

x が $x>$ [オ] の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は [ク] である。

[ク] に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　正の実数全体　　　①　負の実数全体

②　実数全体　　　　　③　1 以外の実数全体

この範囲の t に対して，②がつねに成り立つための必要十分条件は，$\log_3 c \geqq \dfrac{[ケ]}{[コ]}$

である。すなわち，$c \geqq \sqrt[[サ]]{[シス]}$ である。

2　関数 $y=-2^{2x}+2^{x+4}-48$ について考える。

(1)　$t=2^x$ とおく。y を t の式で表すと

$$y=\boxed{ア}\left(t-\boxed{イ}\right)^2+\boxed{ウエ}$$

となる。

$x=1$ のとき，$y=\boxed{オカキ}$ である。$x \geqq 1$ のとき，y は $x=\boxed{ク}$ で最大値 $\boxed{ケコ}$ をとる。

(2)　$k>1$ とする。x が $1 \leqq x \leqq k$ の範囲を動くとき，y の最小値が $\boxed{オカキ}$ であるような k の値の範囲は

$$1<k \leqq \log_2 \boxed{サシ}$$

である。この範囲に含まれる最大の整数の値は $\boxed{ス}$ である。

（次ページに続く。）

(3)　$y=0$ を満たす x は二つある。そのうちの小さい方は［セ］である。また，大きい方は［ソ］を満たす。［ソ］に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つ選べ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

⓪　$1<x<1.2$	①　$1.2<x<1.3$	②　$1.5<x<1.6$
③　$2.4<x<2.5$	④　$2.5<x<2.6$	⑤　$2.6<x<2.8$
⑥　$3.5<x<3.6$	⑦　$3.6<x<3.8$	⑧　$4.2<x<4.4$
⑨　$x>10$		

3

(1)　$\log_{10}10=$ ア である。また，$\log_{10}5$，$\log_{10}15$ をそれぞれ $\log_{10}2$ と $\log_{10}3$ を用いて表すと

$\log_{10}5=$ イ $\log_{10}2+$ ウ

$\log_{10}15=$ エ $\log_{10}2+\log_{10}3+$ オ

となる。

（次ページに続く。）

(2)　太郎さんと花子さんは，15^{20} について話している。
以下では，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

太郎：15^{20} は何桁の数だろう。
花子：15 の 20 乗を求めるのは大変だね。$\log_{10}15^{20}$ の整数部分に着目してみようよ。

$\log_{10}15^{20}$ は

$$\boxed{\text{カキ}} < \log_{10}15^{20} < \boxed{\text{カキ}}+1$$

を満たす。よって，15^{20} は $\boxed{\text{クケ}}$ 桁の数である。

太郎：15^{20} の最高位の数字も知りたいね。だけど，$\log_{10}15^{20}$ の整数部分にだけ着目してもわからないな。
花子：$N\cdot 10^{\boxed{\text{カキ}}} < 15^{20} < (N+1)\cdot 10^{\boxed{\text{カキ}}}$ を満たすような正の整数 N に着目してみたらどうかな。

$\log_{10}15^{20}$ の小数部分は $\log_{10}15^{20}-\boxed{\text{カキ}}$ であり

$$\log_{10}\boxed{\text{コ}} < \log_{10}15^{20}-\boxed{\text{カキ}} < \log_{10}\left(\boxed{\text{コ}}+1\right)$$

が成り立つので，15^{20} の最高位の数字は $\boxed{\text{サ}}$ である。

第３講　微分法・積分法

1　a，b，c を実数とし，関数 $f(x)=x^3-1$，$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，曲線 $y=g(x)$ を C_2 とする。C_2 は点 A$(-1,\ -2)$ を通り，C_2 の A における接線は C_1 の A における接線と一致するものとする。

(1)　曲線 C_1 の点 A における接線を ℓ とする。$f'(-1)=$ **ア** により，ℓ の方程式は

$y=$ **イ** $x+$ **ウ** である。また，原点 O と直線 ℓ の距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2)　曲線 C_2 の点 A における接線は(1)の直線 ℓ と一致しているので，$g'(-1)=$ **カ** である。したがって，b，c を a を用いて表すと，$b=$ **キ** a，$c=$ **ク** $-$ **ケ** となる。

（次ページに続く。）

(3)　$a=-2$ のとき，関数 $g(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{スセソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ をとり，

$x=\boxed{\text{ツ}}$ で極小値 $\boxed{\text{テトナ}}$ をとる。

(4)　$a<0$ とする。$-2\leqq x\leqq -1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x=-2$ で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また，$-1\leqq x\leqq 1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S=S_1+S_2$ とおくと，$S=\boxed{\text{ニ}}$ と表される。$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$\displaystyle\int_{-2}^{-1}\{g(x)-f(x)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

①　$\displaystyle\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,dx$

②　$\displaystyle\int_{-2}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,dx$

③　$\displaystyle\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

これを計算することにより，$S=\boxed{\text{ヌネ}}\,a$ となる。

2

〔1〕 a を実数とし，$f(x)=(x-a)(x-2)$ とおく。また，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とする。

(1) $a=1$ のとき，$F(x)$ は $x=$ ア で極小になる。

(2) $a=$ イ のとき，$F(x)$ はつねに増加する。また，$F(0)=$ ウ であるから，$a=$ イ のとき，$F(2)$ の値は エ である。

エ の解答群

⓪ 0	① 正	② 負

（次ページに続く。）

(3)　$a >$ [イ] とする。

b を実数とし，$G(x) = \int_b^x f(t)\,dt$ とおく。

関数 $y = G(x)$ のグラフは，$y = F(x)$ のグラフを [オ] 方向に [カ] だけ平行移動したものと一致する。また，$G(x)$ は $x =$ [キ] で極大になり，$x =$ [ク] で極小になる。

$G(b) =$ [ケ] であるから，$b =$ [キ] のとき，曲線 $y = G(x)$ と x 軸との共有点の個数は [コ] 個である。

[オ] の解答群

⓪　x 軸	①　y 軸

[カ] の解答群

⓪　b	①　$-b$	②　$F(b)$
③　$-F(b)$	④　$F(-b)$	⑤　$-F(-b)$

（次ページに続く。）

〔2〕 $g(x)=|x|(x+1)$ とおく。

点 P$(-1,\ 0)$ を通り，傾きが c の直線を ℓ とする。$g'(-1)=$ **サ** であるから，$0<c<$ サ のとき，曲線 $y=g(x)$ と直線 ℓ は 3 点で交わる。そのうちの 1 点は P であり，残りの 2 点を点 P に近い方から順に Q，R とすると，点 Q の x 座標は **シス** であり，点 R の x 座標は **セ** である。

（次ページに続く。）

また，$0<c<\boxed{\text{サ}}$ のとき，線分 PQ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とし，線分 QR と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$S=\frac{\boxed{\text{ソ}}c^3+\boxed{\text{タ}}c^2-\boxed{\text{チ}}c+1}{\boxed{\text{ツ}}}$$

$$T=c^{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

第４講　数　列

1　数列 $\{a_n\}$ は，初項が１で

$$a_{n+1}=a_n+4n+2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。また，数列 $\{b_n\}$ は，初項が１で

$$b_{n+1}=b_n+4n+2+2\cdot(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。さらに，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。

(1)　$a_2=$ ア である。また，階差数列を考えることにより

$$a_n=\boxed{イ}n^2-\boxed{ウ} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であることがわかる。さらに

$$S_n=\frac{\boxed{エ}n^3+\boxed{オ}n^2-\boxed{カ}n}{\boxed{キ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を得る。

(2)　$b_2=$ ク である。また，すべての自然数 n に対して

$$a_n-b_n=\boxed{ケ}$$

が成り立つ。

ケ の解答群

⓪　0	①　$2n$	②　$2n-2$
③　n^2-1	④　n^2-n	⑤　$1+(-1)^n$
⑥　$1-(-1)^n$	⑦　$-1+(-1)^n$	⑧　$-1-(-1)^n$

（次ページに続く。）

(3)　(2)から

$$a_{2021}\ \boxed{\text{コ}}\ b_{2021},\quad a_{2022}\ \boxed{\text{サ}}\ b_{2022}$$

が成り立つことがわかる。また，$T_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ とおくと

$$S_{2021}\ \boxed{\text{シ}}\ T_{2021},\quad S_{2022}\ \boxed{\text{ス}}\ T_{2022}$$

が成り立つこともわかる。

コ ～ ス の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$<$	①　$=$	②　$>$

（次ページに続く。）

(4)　数列 $\{b_n\}$ の初項を変えたらどうなるかを考えてみよう。つまり，初項が c で

$$c_{n+1}=c_n+4n+2+2\cdot(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす数列 $\{c_n\}$ を考える。

すべての自然数 n に対して

$$b_n-c_n=\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}$$

が成り立つ。

また，$U_n=\sum_{k=1}^{n} c_k$ とおく。$S_4=U_4$ が成り立つとき，$c=\boxed{\text{タ}}$ である。このとき

$$S_{2021}\ \boxed{\text{チ}}\ U_{2021},\quad S_{2022}\ \boxed{\text{ツ}}\ U_{2022}$$

も成り立つ。

ただし，$\boxed{\text{タ}}$ は，文字 (a〜d) を用いない形で答えること。

$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　＜	①　＝	②　＞

2

〔1〕 自然数 n に対して，$S_n=5^n-1$ とする。さらに，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が S_n であるとする。このとき，$a_1=$ ア である。また，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=\boxed{イ}\cdot\boxed{ウ}^{n-1}$$

である。この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

上で求めたことから，すべての自然数 n に対して

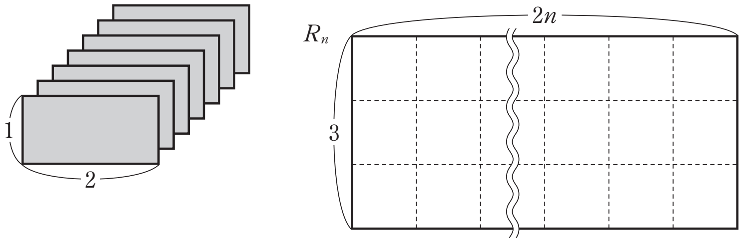
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}\left(1-\boxed{キ}^{-n}\right)$$

が成り立つことがわかる。

（次ページに続く。）

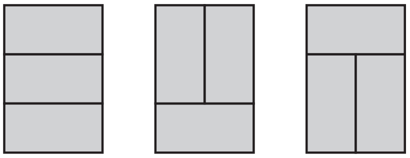
〔２〕 太郎さんは和室の畳を見て，畳の敷き方が何通りあるかに興味を持った。ちょうど手元にタイルがあったので，畳をタイルに置き換えて，数学的に考えることにした。

縦の長さが１，横の長さが２の長方形のタイルが多数ある。それらを縦か横の向きに，隙間も重なりもなく敷き詰めるとき，その敷き詰め方をタイルの「配置」と呼ぶ。

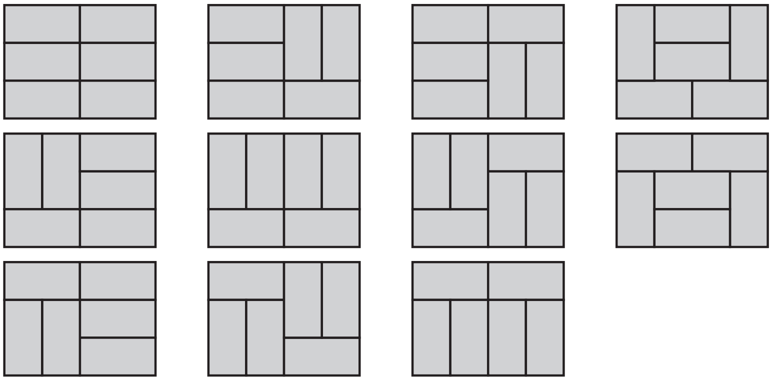


上の図のように，縦の長さが３，横の長さが $2n$ の長方形を R_n とする。$3n$ 枚のタイルを用いた R_n 内の配置の総数を r_n とする。

$n=1$ のときは，下の図のように $r_1=3$ である。

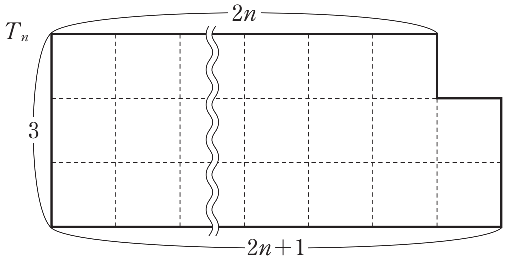


また，$n=2$ のときは，下の図のように $r_2=11$ である。



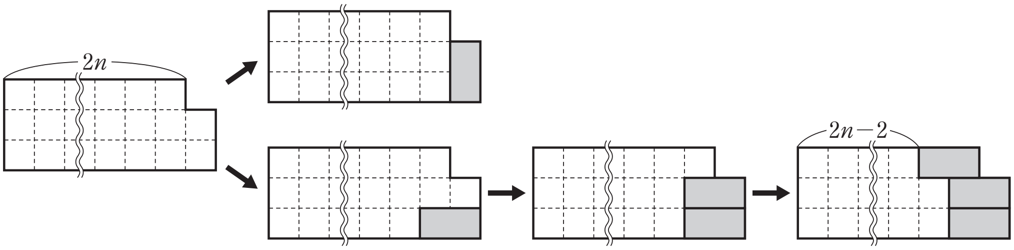
（次ページに続く。）

(1) 太郎さんは次のような図形 T_n 内の配置を考えた。



$(3n+1)$ 枚のタイルを用いた T_n 内の配置の総数を t_n とする。$n=1$ のときは，$t_1=$ **ク** である。

さらに，太郎さんは T_n 内の配置について，右下隅（すみ）のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。



この図から，2 以上の自然数 n に対して

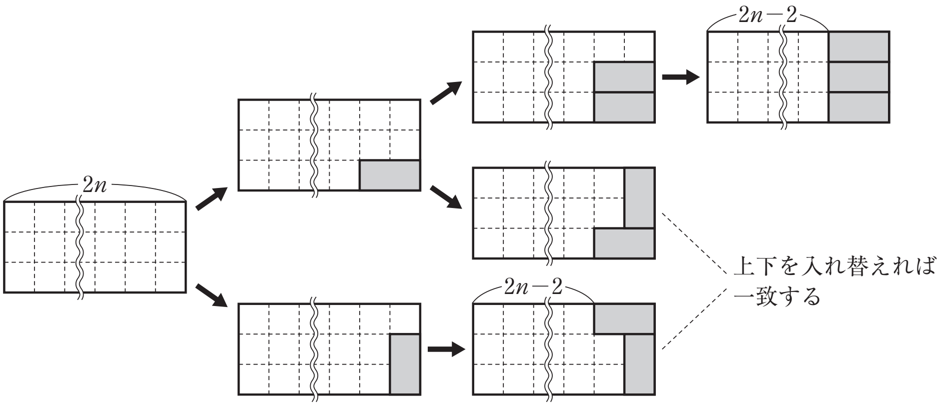
$$t_n=Ar_n+Bt_{n-1}$$

が成り立つことがわかる。ただし，$A=$ **ケ**，$B=$ **コ** である。

以上から，$t_2=$ **サシ** であることがわかる。

（次ページに続く。）

同様に，R_n の右下隅のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。



この図から，2 以上の自然数 n に対して

$r_n = Cr_{n-1} + Dt_{n-1}$

が成り立つことがわかる。ただし，$C =$ **ス** ，$D =$ **セ** である。

(2)　畳を縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形とみなす。縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は **ソタ** である。

また，縦の長さが 3，横の長さが 8 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は **チツテ** である。

第５講　ベクトル

1　O を原点とする座標空間に２点 A$(-1,\ 2,\ 0)$，B$(2,\ p,\ q)$ がある。ただし，$q>0$ とする。線分 AB の中点 C から直線 OA に引いた垂線と直線 OA の交点 D は，線分 OA を 9：1 に内分するものとする。また，点 C から直線 OB に引いた垂線と直線 OB の交点 E は，線分 OB を 3：2 に内分するものとする。

(1)　点 B の座標を求めよう。

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=$ **ア** である。また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウエ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であることにより，

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ **ケ** ……………………………①

である。同様に，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ から

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=20$ ……………………………②

を得る。

①と②，および $q>0$ から，B の座標は $\left(2,\ \boxed{コ},\ \sqrt{\boxed{サ}}\right)$ である。

（次ページに続く。）

(2)　3点O，A，Bの定める平面を α とし，点 $(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$ をGとする。また，α 上に点Hを $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つようにとる。$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表そう。

Hが α 上にあることから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

と表される。よって

$$\overrightarrow{GH}=\boxed{\text{シ}}\,\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

である。これと，$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ および $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つことから，$s=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，

$t=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ が得られる。ゆえに

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\overrightarrow{OB}$$

となる。また，このことから，Hは $\boxed{\text{ツ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

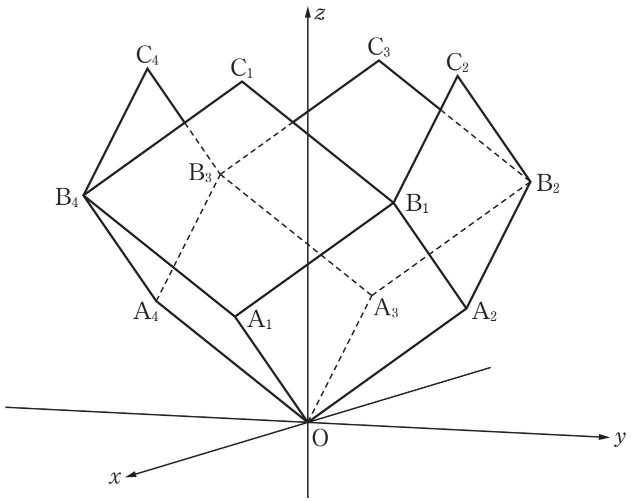
⓪　三角形OACの内部の点
①　三角形OBCの内部の点
②　点O，Cと異なる，線分OC上の点
③　三角形OABの周上の点
④　三角形OABの内部にも周上にもない点

2 　a を正の実数とする。O を原点とする座標空間に 4 点

$$A_1(1,\ 0,\ a),\ A_2(0,\ 1,\ a),\ A_3(-1,\ 0,\ a),\ A_4(0,\ -1,\ a)$$

がある。また，次の図のように，4 点 B_1，B_2，B_3，B_4 を四角形 $A_1OA_2B_1$，$A_2OA_3B_2$，$A_3OA_4B_3$，$A_4OA_1B_4$ がそれぞれひし形になるようにとる。さらに，4 点 C_1，C_2，C_3，C_4 を四角形 $A_1B_1C_1B_4$，$A_2B_2C_2B_1$，$A_3B_3C_3B_2$，$A_4B_4C_4B_3$ がそれぞれひし形になるようにとる。

ただし，座標空間における四角形を考える際には，その四つの頂点が同一平面上にあるものとする。



(1)　点 B_2，C_3 の座標は

$$B_2\left(-1,\ \boxed{ア},\ \boxed{イウ}\right),\ C_3\left(-1,\ \boxed{エ},\ \boxed{オカ}\right)$$

である。

（次ページに続く。）

また，

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=$ キ ， $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{B_2C_3}=$ ク

となる。

キ ， ク の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② -1
③ a^2	④ a^2+1	⑤ a^2-1
⑥ $2a^2$	⑦ $2a^2+1$	⑧ $2a^2-1$

(2)　ひし形 $A_1OA_2B_1$ と $A_1B_1C_1B_4$ が合同であるとする。

対応する対角線の長さが等しいことから，$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ であることがわかる。

直線 OA_1 上の点 P を $\angle OPA_2$ が直角となるようにとる。

実数 s を用いて $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA_1}$ と表せる。$\overrightarrow{PA_2}$ と $\overrightarrow{OA_1}$ が垂直であること，および

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ ， $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$

であることにより

$s=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$

であることがわかる。

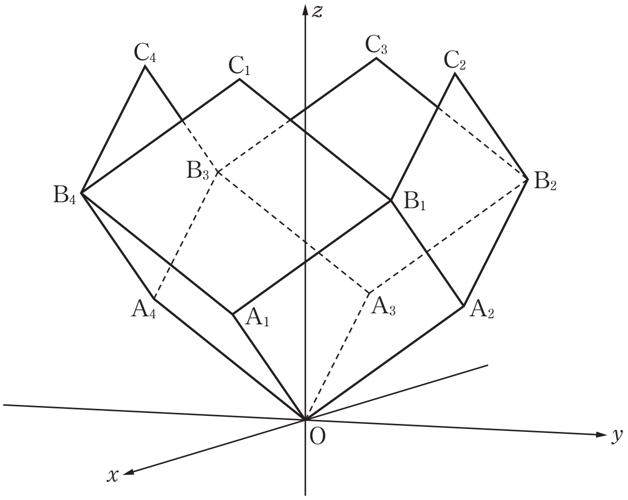
（次ページに続く。）

(3)　実数 a および点 P を(2)のようにとり，3 点 P，A_2，A_4を通る平面を α とするとき，次のことについて考察しよう。

考察すること

平面 α と 2 点 B_2，C_3 の位置関係

$\angle OPA_4$ も直角であるので，$\overrightarrow{OA_1}$ と平面 α は垂直であることに注意する。



直線 B_2C_3 と平面 α の交点を Q とする。

実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB_2}+t\overrightarrow{B_2C_3}$$

と表せる。$\overrightarrow{PQ}$ が $\overrightarrow{OA_1}$ と垂直であることにより

$t=$ **チ**

であることがわかる。

座標空間から平面 α を除いた部分は，α を境に，原点 O を含む側と含まない側に分けられる。このとき，点 B_2 は **ツ** にあり，点 C_3 は **テ** にある。

（次ページに続く。）

［チ］の解答群

⓪ 0	① 1	② -1	③ $\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{2}$	⑤ $\frac{1}{3}$	⑥ $-\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{2}{3}$

［ツ］，［テ］の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ α 上
① O を含む側
② O を含まない側

テキスト解答

【講義問題の略解】

※動画講義の内容を補完するものです。記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません。ご了承ください。

第1講　図形と方程式・三角関数

1　(1)　$\ell_1 : 3x+2y-39=0$ において，$y=0$ のとき $x=13$

よって，直線 ℓ_1 と x 軸は，点 $(13,\ 0)$ で交わる。

$\ell_2 : kx-y-5k+12=0 \iff k(x-5)-y+12=0$ より，$x=5$，$y=12$ のときこの式は k の値に関係なく成立する。よって，直線 ℓ_2 は k の値に関係なく点 $(5,\ 12)$ を通る。また，$x=5$，$y=12$ のとき，ℓ_1 の式も成立することから，直線 ℓ_1 も点 $(5,\ 12)$ を通る。

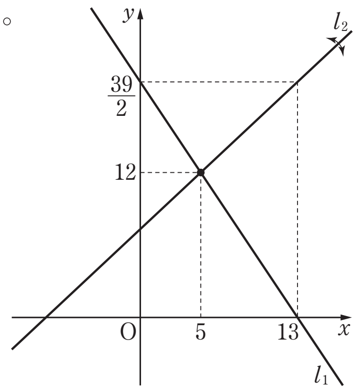
(2)　$\ell_2 : y=k(x-5)+12$ より，ℓ_2 は傾き k の直線である。

よって，2直線 ℓ_1，ℓ_2 および x 軸によって囲まれた三角形ができないのは

・$k=0$（ℓ_2 は x 軸と平行な直線）

・$k=-\dfrac{3}{2}$（ℓ_2 が ℓ_1 と一致）

のいずれかの場合である。



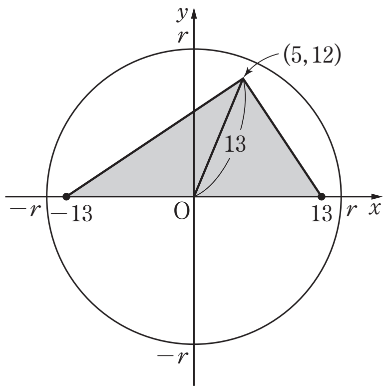
(3)　直線 ℓ_2 が点 $(-13,\ 0)$ を通るとき $k=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$

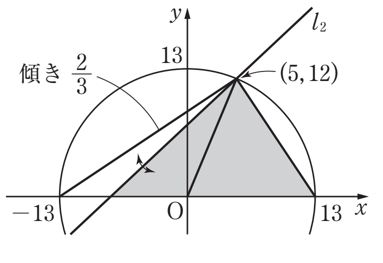
領域 D は，3点 $(5,\ 12)$，$(13,\ 0)$，$(-13,\ 0)$ を頂点とする三角形の周および内部であり，領域 E は，原点中心，半径 r の円の周および内部である。右図より，D が E に含まれるような r の値の範囲は $r \geqq 13$ である。

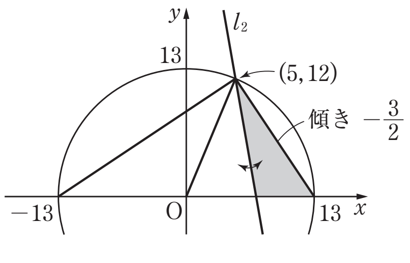
$r=13$ のとき，D が E に含まれるような k の値の範囲は，k が直線 ℓ_2 の傾きであることから

$k>0$ のとき $k \geqq \dfrac{2}{3}$　　$k<0$ のとき $k<-\dfrac{3}{2}$

である。







2 (1)　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において

$\tan\theta=-\sqrt{3}$ のとき

$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ (⓪), $\cos\theta=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ (⑦), $\sin\theta=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (④)

$\tan\theta=k$ のとき

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+k^2}$

$\cos\theta>0$ より　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ (⑧)

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=k\times\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ (ⓐ)

(2)　$p=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$-1<\sin\theta<1$　　よって　$-2<p<2$ (②)

$$q=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{7}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\theta}=\tan\theta\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}$$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\tan\theta$ のとり得る値の範囲は実数全体。

$\cos\dfrac{\pi}{7}$ は0でない定数，$\sin\dfrac{\pi}{7}$ は定数であるから

q のとり得る値の範囲は　実数全体 (④)

(3)　$r=\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta}=\tan\theta\cos\alpha+\sin\alpha$

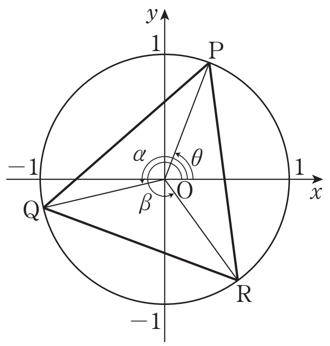
α の値を $0\leqq\alpha<2\pi$ において一つ定めたとき，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ は定数であるから，

r のとり得る値の範囲が q のとり得る値の範囲と異なるのは

$\cos\alpha=0$　つまり　$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

のときで，このとき r は定数 $\sin\alpha$ となる。よって　②

3 (1)　考察１について



△PQR が正三角形である場合，$\angle\text{PRQ}=\dfrac{\pi}{3}$ より

$\angle\text{POQ}=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$\alpha=\theta+\dfrac{2}{3}\pi$

同様に，$\angle\text{QOR}=\dfrac{2}{3}\pi$ より，$\beta=\theta+\dfrac{4}{3}\pi$

加法定理により

$$\cos\alpha=\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{2}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta \quad (⑦)$$

$$\sin\alpha=\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \quad (④)$$

同様に

$$\cos\beta=\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{4}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$$

$$\sin\beta=\sin\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{4}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

これらのことから

$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta$$

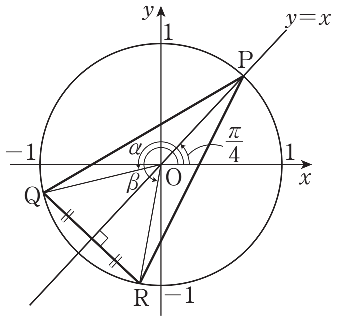
$$=\cos\theta+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)=0$$

$$t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta$$

$$=\sin\theta+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=0$$

より，$s=t=0$ である。

考察２について，$\mathrm{Q}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{R}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ が直線 $y=x$ に関して対称であるから，$\sin\beta=\cos\alpha$，$\cos\beta=\sin\alpha$ が成り立つ。よって



$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha+\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

したがって，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

である。したがって

$$s=t=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$s=t=0$ のとき

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{5}{4}\pi$ より $\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi$

よって，$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi$ より $\alpha=\frac{11}{12}\pi$

また，$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}\pi$ より，$\beta=\frac{5}{2}\pi-\alpha=\frac{5}{2}\pi-\frac{11}{12}\pi=\frac{19}{12}\pi$

(2)　$s=t=0$ のとき

$\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=0$ より $\cos\theta=-\cos\alpha-\cos\beta$

$\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=0$ より $\sin\theta=-\sin\alpha-\sin\beta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$(-\sin\alpha-\sin\beta)^2+(-\cos\alpha-\cos\beta)^2=1$

$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=1$

よって，$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$　……①

同様に，$\cos\beta=-\cos\theta-\cos\alpha$，$\sin\beta=-\sin\theta-\sin\alpha$，$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より

$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=-\frac{1}{2}$　……②

①より　$\cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}$　　　②より　$\cos(\alpha-\theta)=-\frac{1}{2}$

よって，$\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\theta)=-\frac{1}{2}$

ここで，$0\leqq\theta<\alpha<\beta<2\pi$ より，$0<\beta-\alpha<2\pi$，$0<\alpha-\theta<2\pi$

よって，$\beta-\alpha$ および $\alpha-\theta$ は $\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$ のいずれかである。

$\theta+(\beta-\alpha)+(\alpha-\theta)<2\pi$ より，$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi$

(3)　考察１より，△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ である。

また，考察３より

$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi$ であるから，$\angle QOR=\angle POQ=\frac{2}{3}\pi$

よって，$\angle QPR=\angle PRQ=\frac{\pi}{3}$ であり，$\angle RQP=\frac{\pi}{3}$ であるから，△PQR は正三角形である。

したがって，$s=t=0$ ならば，△PQR は正三角形である。

以上より，△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である（⓪）。

（参考）

考察２の結果について，

$\theta=\frac{\pi}{4}$，$\alpha=\frac{11}{12}\pi$ より，$\angle POQ=\alpha-\theta=\frac{11}{12}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi$

$\alpha = \frac{11}{12}\pi$，$\beta = \frac{19}{12}\pi$ より，$\angle \mathrm{QOR} = \beta - \alpha = \frac{19}{12}\pi - \frac{11}{12}\pi = \frac{2}{3}\pi$

よって，$\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{QPR} = \frac{\pi}{3}$ であり，PQ＝PR であるから，△PQR は正三角形である。

第２講　指数関数・対数関数

1　$x^{\log_3 x} \geqq \left(\dfrac{x}{c}\right)^3$　$(c>0)$　……①

①の真数条件より $x>0$ であるから，①の両辺はともに正である。

よって，3 を底とする①の両辺の対数をとると

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geqq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3$$

$$(\log_3 x)(\log_3 x) \geqq 3\log_3 \frac{x}{c}$$

$$(\log_3 x)^2 \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

$t=\log_3 x$ とおくと

$t^2 \geqq 3(t-\log_3 c)$　よって，$t^2-3t+3\log_3 c \geqq 0$　……②

$c=\sqrt[3]{9}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$ のとき，$3\log_3 c=3\log_3 3^{\frac{2}{3}}=3\times\dfrac{2}{3}=2$ より，②は

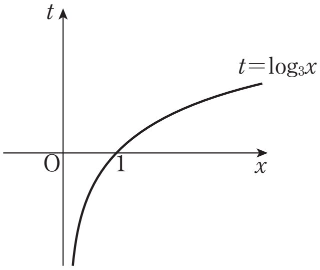
$t^2-3t+2 \geqq 0$　　$(t-1)(t-2) \geqq 0$　　よって，$t \leqq 1$，$t \geqq 2$

つまり，$\log_3 x \leqq 1$，$\log_3 x \geqq 2$ より，$x \leqq 3$，$x \geqq 9$

これと，真数条件 $x>0$ より，$0<x \leqq 3$，$x \geqq 9$

次に，①が $x>0$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求める。

x が $x>0$ の範囲を動くとき，$t=\log_3 x$ のとり得る値の範囲は実数全体（②）である。



$$(\text{②の左辺})=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3\log_3 c$$

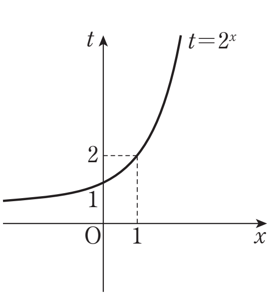
であるから，すべての実数 t で②がつねに成り立つための必要十分条件は

$-\dfrac{9}{4}+3\log_3 c \geqq 0$　つまり　$\log_3 c \geqq \dfrac{3}{4}$ である。

すなわち，$c \geqq 3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}$ である。

2　(1)　$t=2^x$ とおくと

$$\begin{aligned} y &= -2^{2x}+2^{x+4}-48 \\ &= -(2^x)^2+2^4\cdot 2^x-48 \\ &= -t^2+16t-48 \\ &= -(t-8)^2+16 \end{aligned}$$



$x=1$ のとき，$t=2^1=2$　より

$y=-(2-8)^2+16=-20$

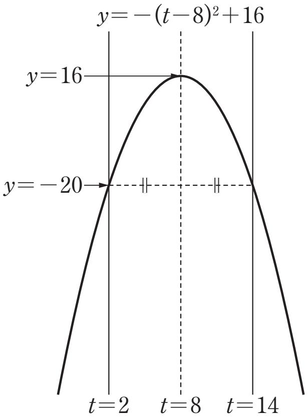
$x \geqq 1$ のとき，$t \geqq 2$ であるから，y は $t=8$，つまり $x=3$ で最大値 16 をとる。

(2)　x が $1 \leqq x \leqq k\ (k>1)$ の範囲を動くとき，t は $2 \leqq t \leqq 2^k$ の範囲を動く。このとき，y の最小値が -20 であるような k の値の範囲は

$2^1 < 2^k \leqq 14$ より　$1 < k \leqq \log_2 14$

ここで，$\log_2 8 < \log_2 14 < \log_2 16$ より，$3 < \log_2 14 < 4$

よって，$1 < k \leqq \log_2 14$ に含まれる最大の整数の値は 3 である。



(3)　$y=0$ のとき

$-(t-8)^2+16=0$　　$(t-8)^2=16$

$t-8=\pm 4$　　$t=4,\ 12$

よって，$y=0$ を満たす x は $2^x=4$，$2^x=12$ を満たす x である。

そのうち小さい方は $x=2$ である。

また，大きい方は

$$x=\log_2 12=\log_2 (2^2\cdot 3)=2+\log_2 3$$

$$=2+\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

$$=2+\frac{0.4771}{0.3010}=2+1.585\cdots\cdots=3.585\cdots\cdots$$

よって，大きい方は $3.5<x<3.6$（⑥）を満たす。

3　(1)　$\log_{10} 10=1$

$$\log_{10} 5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10} 10-\log_{10} 2=-\log_{10} 2+1$$

$$\log_{10} 15=\log_{10}(3\cdot 5)=\log_{10} 3+\log_{10} 5=-\log_{10} 2+\log_{10} 3+1$$

(2)　$\log_{10} 15^{20}=20\log_{10} 15=20(-\log_{10} 2+\log_{10} 3+1)=20(-0.3010+0.4771+1)$

$=20\times 1.1761=23.522$

したがって，$\log_{10} 15^{20}$ は $23<\log_{10} 15^{20}<23+1$ を満たす。

よって，$10^{23}<15^{20}<10^{24}$ より，15^{20} は 24 桁の数である。

$\log_{10} 15^{20}$ の小数部分は $\log_{10} 15^{20}-23=0.522$ であり，

$\log_{10} 3=0.4771$

$\log_{10} 4=\log_{10} 2^2=2\log_{10} 2=2\times 0.3010=0.6020$ より，

$\log_{10} 3<\log_{10} 15^{20}-23<\log_{10}(3+1)$

よって，$\log_{10} 3+23<\log_{10} 15^{20}<\log_{10} 4+23$

$\log_{10} 3+\log_{10} 10^{23}<\log_{10} 15^{20}<\log_{10} 4+\log_{10} 10^{23}$

$\log_{10} 3\cdot 10^{23}<\log_{10} 15^{20}<\log_{10} 4\cdot 10^{23}$

したがって，$3\cdot 10^{23}<15^{20}<4\cdot 10^{23}$

ゆえに，15^{20} の最高位の数字は 3 である。

第３講　微分法・積分法

1 (1)　$C_1 : f(x)=x^3-1$ より，$f'(x)=3x^2$

C_1 上の点 A$(-1,\ -2)$ における接線 ℓ の傾きは $f'(-1)=3$

よって，接線 ℓ の方程式は

$y=3(x+1)-2$　　つまり　$y=3x+1$

原点 O と直線 $\ell : 3x-y+1=0$ の距離は

$$\frac{|3\cdot 0-1\cdot 0+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

(2)　曲線 $C_2 : g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ の点 A$(-1,\ -2)$ における接線が直線 ℓ と一致しているので，$g'(-1)=3$

$g'(x)=3x^2+2ax+b$ より，$g'(-1)=3-2a+b=3$　……①

また，C_2 は点 A を通るので，$g(-1)=-1+a-b+c=-2$　……②

①より，$b=2a$

これを②に代入して整理すると，$c=a-1$ となる。

(3)　$a=-2$ のとき，(2)より $b=-4$，$c=-3$

このとき

$g(x)=x^3-2x^2-4x-3$

$g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

よって，$g(x)$ の増減表は右図。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$g\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-3=-\frac{41}{27}$$

$g(2)=2^3-2\cdot 2^2-4\cdot 2-3=-11$

よって，$g(x)$ は $x=-\frac{2}{3}$ で極大値 $-\frac{41}{27}$ をとり，$x=2$ で極小値 -11 をとる。

(4)　(2)より，$g(x)=x^3+ax^2+2ax+a-1$

このとき

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=(x^3-1)-(x^3+ax^2+2ax+a-1)\\&=-ax^2-2ax-a\\&=-a(x^2+2x+1)\\&=-a(x+1)^2\geqq 0\quad(\because\ a<0)\end{aligned}$$

等号成立は $x=-1$ のとき

したがって，$f(x)\geqq g(x)$ であることから，$-2\leqq x\leqq -1$ において，曲線 C_1，C_2 および直線 $x=-2$ で囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

と表され，$-1\leqq x\leqq 1$ において，曲線 C_1，C_2 および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積 S_2 は

$$S_2=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

と表される。したがって，

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2\\&=\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx\\&=\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx\quad(③)\\&=-a\int_{-2}^{1}(x+1)^2dx\\&=-a\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-2}^{1}=-a\left\{\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=-3a\end{aligned}$$

2 〔1〕

(1)　$a=1$ のとき，$f(x)=(x-1)(x-2)$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

この式の両辺を x で微分すると

$$F'(x)=f(x)$$

つまり，$F'(x)=(x-1)(x-2)$

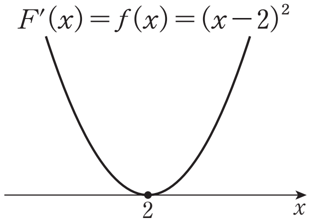
よって，$F(x)$ の増減は右表。

x	…	1	…	2	…
$F'(x)$	＋	0	－	0	＋
$F(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

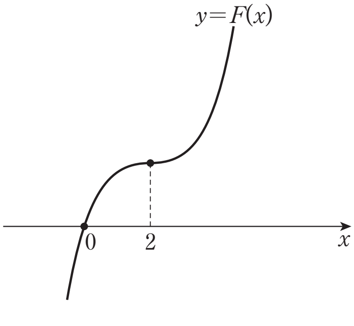
したがって，$F(x)$ は $x=2$ で極小となる。

(2)　$F'(x)=f(x)=(x-a)(x-2)$

$F(x)$ がつねに増加するのは，$F'(x)$，つまり $f(x)=(x-a)(x-2)$ がつねに0以上，すなわち $y=f(x)$ のグラフにおいて x 軸より下の部分が存在しない場合であり，それは $a=2$ のときである。



また，$F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$ であるから，$a=2$ のとき，$F(2)$ の値は正（①）である。



(3)　$a>2$ とする

$$\begin{aligned}G(x)&=\int_b^x f(t)\,dt\\&=\int_b^0 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt\end{aligned}$$

$$=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^b f(t)\,dt=F(x)-F(b)$$

よって，$y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを y 軸（①）方向に $-F(b)$（③）だけ平行移動したものと一致する。

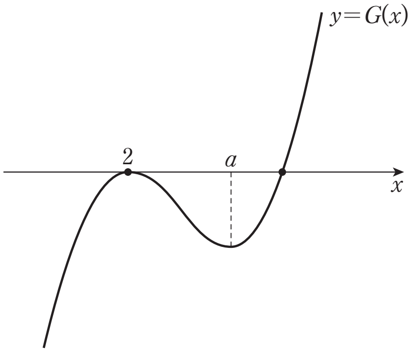
よって，$G'(x)=F'(x)=(x-a)(x-2)$

$a>2$ より，$G(x)$ の増減は右表。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$G'(x)$	＋	0	－	0	＋
$G(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

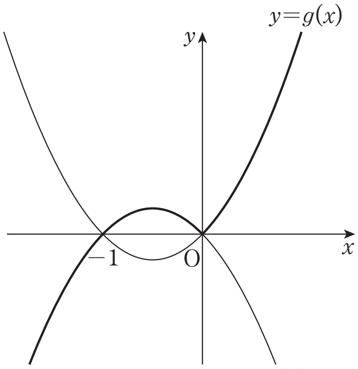
したがって，$G(x)$ は $x=2$ で極大になり，$x=a$ で極小となる。

また，$G(b)=\int_b^b f(t)\,dt=0$ であるから，$b=2$ のとき $G(2)=0$ である。よって，$b=2$ のとき，曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は 2 個である。



〔２〕 $g(x)=|x|(x+1)$

$$=\begin{cases} x(x+1)=x^2+x & (x\geqq 0) \\ -x(x+1)=-x^2-x & (x<0) \end{cases}$$



よって，$y=g(x)$ のグラフは右図。

$x<0$ のとき　$g'(x)=-2x-1$ より，

$g'(-1)=-2\cdot(-1)-1=1$

よって，$y=g(x)$ 上の点 P$(-1,\ 0)$ における接線の傾きは 1

したがって，$0<c<1$ のとき，曲線 $y=g(x)$ と，点 P を通り傾きが c の直線 ℓ は 3 点で交わる。

直線 ℓ の方程式は $y=c(x+1)$ より $y=cx+c$

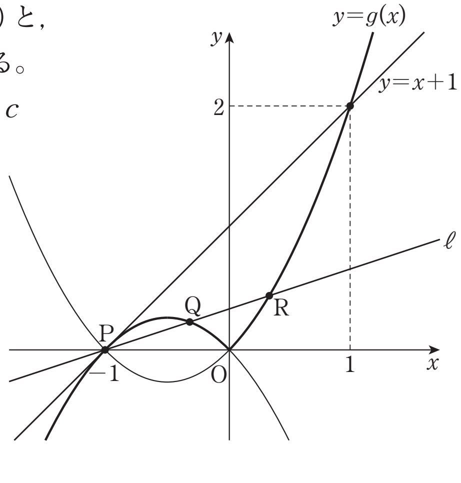
よって，曲線 $y=g(x)$ と直線 ℓ の共有点の x 座標は，$x<0$ のとき

$\begin{cases} y=-x^2-x \\ y=cx+c \end{cases}$ より y を消去して整理すると

$x^2+(c+1)x+c=0$　　$(x+1)(x+c)=0$

$x<0$ より $x=-1,\ -c$

よって，点 Q の x 座標は $x=-c$



$x \geqq 0$ のとき

$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = cx + c \end{cases}$ より y を消去して整理すると

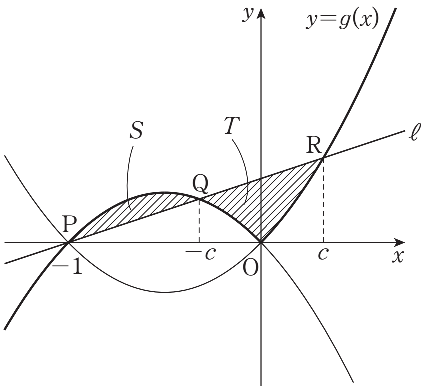
$x^2 + (-c+1)x - c = 0$　　$(x+1)(x-c) = 0$　　$x \geqq 0$ より $x = c$

よって，点 R の x 座標は $x = c$

$0 < c < 1$ のとき

線分 PQ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の

面積 S は



$$S = \int_{-1}^{-c} \{(-x^2 - x) - (cx + c)\}\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{-c} \{x^2 + (c+1)x + c\}\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{-c} (x+1)(x+c)\,dx$$

$$= -\left[-\frac{1}{6}\{-c-(-1)\}^3 \right]$$

$$= \frac{1}{6}(-c+1)^3 = \frac{-c^3 + 3c^2 - 3c + 1}{6}$$

線分 QR と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 T は

$$T = \int_{-c}^{0} \{(cx+c) - (-x^2 - x)\}\,dx + \int_{0}^{c} \{(cx+c) - (x^2 + x)\}\,dx$$

$$= \int_{-c}^{c} (cx+c)\,dx - \int_{-c}^{0} (-x^2 - x)\,dx - \int_{0}^{c} (x^2 + x)\,dx$$

$$= \{(-c^2 + c) + (c^2 + c)\} \cdot 2c \cdot \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{-c} - \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{c}$$

$$= 2c^2 - \left(-\frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{2}c^2 \right) - \left(\frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{2}c^2 \right) = c^2$$

第4講　数　列

1 (1) $a_1=1$，$a_2=a_1+4\cdot1+2=1+6=7$

$a_{n+1}-a_n=4n+2$ より，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=2n^2-1\ (n=1\text{ のときも成立})$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-1)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n=\frac{2n^3+3n^2-2n}{3}$$

(2) $b_1=1$，$b_2=b_1+4\cdot1+2+2\cdot(-1)^1=1+4=5$

$a_{n+1}=a_n+4n+2$ ……①　　$b_{n+1}=b_n+4n+2+2\cdot(-1)^n$ ……②

①－②より

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n-2\cdot(-1)^n$

$d_n=a_n-b_n$ とおくと，$d_{n+1}-d_n=-2\cdot(-1)^n$，$d_1=a_1-b_1=0$ より，$n\geqq2$ のとき

$$d_n=d_1+\sum_{k=1}^{n-1}\{-2\cdot(-1)^k\}=0+\frac{2\{1-(-1)^{n-1}\}}{1-(-1)}=1+(-1)^n\ (n=1\text{ のときも成立})$$

よって，$a_n-b_n=1+(-1)^n$　(⑤)

(3) $a_n-b_n=1+(-1)^n$ より

n が奇数のとき $a_n-b_n=0$　つまり $a_n=b_n$

n が偶数のとき $a_n-b_n=2$　つまり $a_n=b_n+2$ であるから $a_n>b_n$

よって，$a_{2021}=b_{2021}$　(①)，　$a_{2022}>b_{2022}$　(②)

また，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ に関して，$S_{2021}>T_{2021}$　(②)，　$S_{2022}>T_{2022}$　(②)

(4) $c_{n+1}=c_n+4n+2+2\cdot(-1)^n$ ……③

②－③より

$b_{n+1}-c_{n+1}=b_n+4n+2+2\cdot(-1)^n-\{c_n+4n+2+2\cdot(-1)^n\}=b_n-c_n$

よって，$b_n-c_n=b_1-c_1=1-c$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$U_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ に関して

$S_4=U_4\iff S_4-U_4=0\iff(a_1-c_1)+(a_2-c_2)+(a_3-c_3)+(a_4-c_4)=0$

ここで　$a_n-c_n=(a_n-b_n)+(b_n-c_n)=\{1+(-1)^n\}+(1-c)=2+(-1)^n-c$ より

$S_4=U_4\iff(2-c)\cdot4+(-1)+1+(-1)+1=0$　　よって　$c=2$

このとき $a_n-c_n=(-1)^n=-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$

よって，$S_{2021}-U_{2021}=\sum_{k=1}^{2021}a_k-\sum_{k=1}^{2021}c_k=\sum_{k=1}^{2021}(a_k-c_k)=-1<0$ より $S_{2021}<U_{2021}$　(⓪)

$S_{2022}-U_{2022}=\sum_{k=1}^{2022}a_k-\sum_{k=1}^{2022}c_k=\sum_{k=1}^{2022}(a_k-c_k)=0$ より $S_{2022}=U_{2022}$　(①)

2 〔1〕 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=5^n-1$ で表されるとき

$$a_1=S_1=5^1-1=4$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)=5\cdot 5^{n-1}-1\cdot 5^{n-1}=(5-1)\cdot 5^{n-1}=4\cdot 5^{n-1}$$

この式で $n=1$ のとき，$4\cdot 5^0=4$ となり a_1 と一致する。

したがって，$a_n=4\cdot 5^{n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

このとき，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{4\cdot 5^{n-1}}=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{16}(1-5^{-n})$$

〔2〕 R_n および r_n について

$n=1$ のとき

図形 R_1 は縦の長さが3，横の長さが2の長方形であり，3枚のタイルを用いた図形 R_1 内の配置の総数は $r_1=3$ である。

$n=2$ のとき

図形 R_2 は縦の長さが3，横の長さが4の長方形であり，6枚のタイルを用いた図形 R_2 内の配置の総数は $r_2=11$ である。

(1) T_n および t_n について

$n=1$ のとき

図形 T_1 は図1である。4枚のタイルを用いた図形 T_1 内の配置の総数 t_1 について考える。

図1

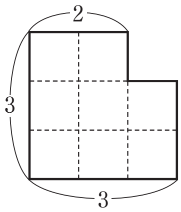


図2

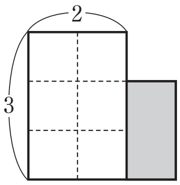


図3

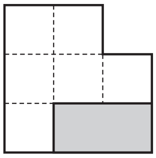


図4

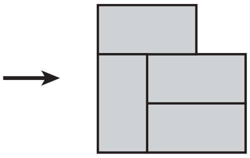


図2のように1枚のタイルを敷き詰めたとすると，図形 T_1 の残りの部分は図形 R_1 であり，残り3枚のタイルを用いた配置の総数は r_1 すなわち3通りである。

図3のように1枚のタイルを敷き詰めたとすると，残りの3枚のタイルを用いた配置は図4の1通りである。

よって，$t_1=3+1=4$

図形 T_n について

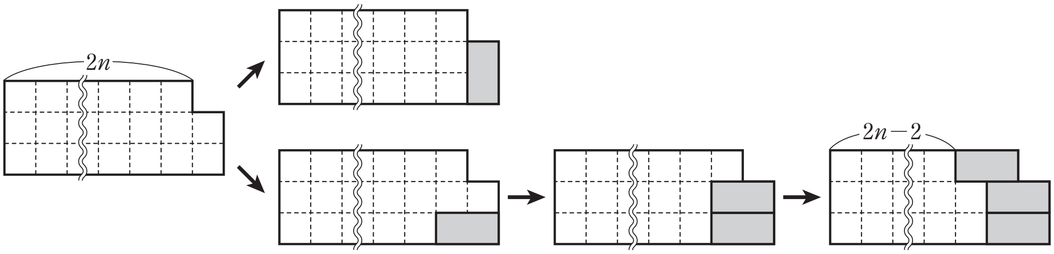


図5　図6　図7　図8

図形 T_n の右下隅のタイルに注目すると，図 5 または図 6 の 2 通りの敷き方があり，この 2 通りですべてである。

図 5 のように 1 枚のタイルを敷き詰めたとすると，図形 T_n の残りの部分は図形 R_n であり，残り $3n$ 枚のタイルを用いた配置の総数は r_n 通りである。

図 6・図 7・図 8 のようにタイルを 1 枚ずつ，計 3 枚敷いたとすると，図 8 において図形 T_n の残りの部分は図形 T_{n-1} であり，残り $(3n-2)$ 枚，すなわち $\{3(n-1)+1\}$ 枚のタイルを用いた配置の総数は t_{n-1} 通りである。

よって，2 以上の自然数 n に対して，$t_n=1\times r_n+1\times t_{n-1}=r_n+t_{n-1}$ が成り立つ。

以上より，$t_2=r_2+t_1=11+4=15$ であることがわかる。

図形 R_n において，右下隅のタイルに注目する

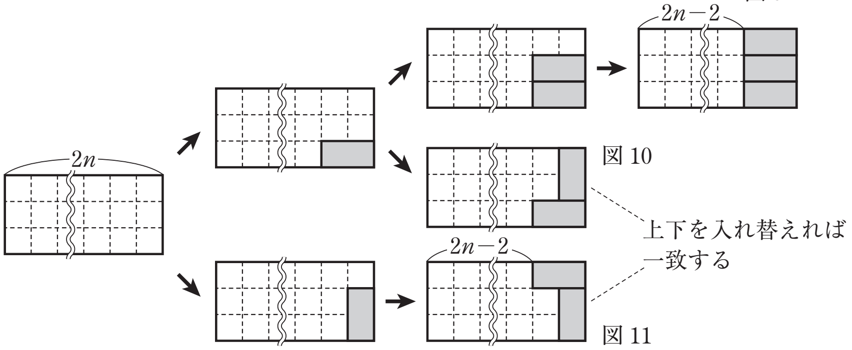


図9　図10　図11

図 9〜11 のようにタイルを敷いた後の R_n の残りの部分について

図 9 は図形 R_{n-1} であり，残りのタイルの配置の総数は r_{n-1} 通り

図 10，図 11 は図形 T_{n-1} であり，残りのタイルの配置の総数は t_{n-1} 通り

である。よって，2 以上の自然数 n に対して，$r_n=r_{n-1}+2t_{n-1}$ が成り立つ。

(2)　畳を縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形とみなすとき，縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形の部屋における畳の敷き詰め方の総数は，図形 R_3 内のタイルの配置の総数であり

$r_3=r_2+2t_2=11+2\cdot 15=41$

である。

また，縦の長さが 3，横の長さが 8 の長方形の部屋における畳の敷き詰め方の総数は，

図形 R_4 内のタイルの配置の総数であり

$$r_4 = r_3 + 2t_3 = r_3 + 2(r_3 + t_2) = 3r_3 + 2t_2 = 3 \cdot 41 + 2 \cdot 15 = 153$$

である。

第５講　ベクトル

1 (1) $\overrightarrow{OA}=(-1,\ 2,\ 0)$ より

$|\overrightarrow{OA}|^2=(-1)^2+2^2+0^2=5$

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

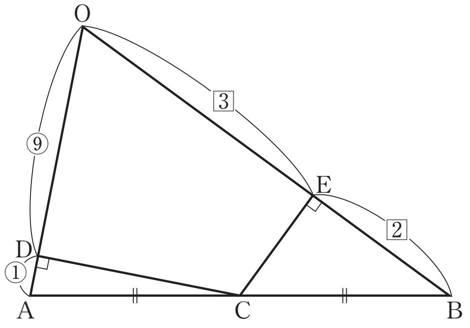
であることから

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OA}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

と表される。



$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CD}$ から $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=0$

$\dfrac{2}{5}|\overrightarrow{OA}|^2-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　　$\dfrac{2}{5}\cdot5-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$　……①

同様に

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{OB}$

であり，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CE}$ から $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ であることから，

$\overrightarrow{OB}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{OB}\right)=0$

$-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0$　　$-\dfrac{1}{2}\cdot4+\dfrac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0$

よって，$|\overrightarrow{OB}|^2=20$　……②

$\overrightarrow{OA}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ p,\ q)$ より

①から，$-2+2p=4$　　よって，$p=3$

②から，$2^2+p^2+q^2=20$　　$4+3^2+q^2=20$　　$q^2=7$　　$q>0$ から，$q=\sqrt{7}$

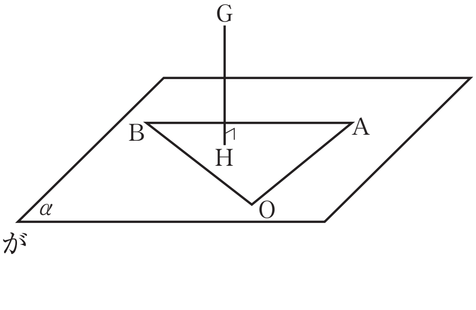
したがって，B の座標は $(2,\ 3,\ \sqrt{7})$ である。

(2) 点 H が平面 α 上にあることから，実数 s，t を用いて

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

と表される。よって，

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=-\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$



である。これと，$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ および $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つことから，

$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より

$(-\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}+s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ ……③

$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より

$(-\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2=0$ ……④

$\overrightarrow{OG}=(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$ より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}=-1\cdot4+2\cdot4+0\cdot(-\sqrt{7})=4$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OG}=2\cdot4+3\cdot4+\sqrt{7}\cdot(-\sqrt{7})=13$

よって，③，④より

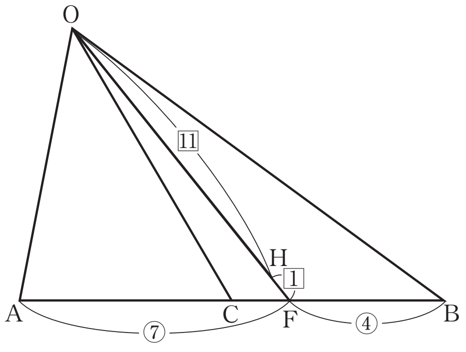
$\begin{cases}-4+5s+4t=0\\-13+4s+20t=0\end{cases}$　したがって，$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{7}{12}$

ゆえに，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{7}{12}\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{4}{12}\overrightarrow{OA}+\dfrac{7}{12}\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{11}{12}\left(\dfrac{4}{11}\overrightarrow{OA}+\dfrac{7}{11}\overrightarrow{OB}\right)$

したがって，線分 AB を 7：4 に内分する点を F とすると，点 H は線分 OF を 11：1 に内分する点である。



このことから，H は三角形 OBC の内部の点（①）である。

2 (1)　$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=(0,\ 1,\ a)+(-1,\ 0,\ a)=(-1,\ 1,\ 2a)$

よって，$B_2(-1,\ 1,\ 2a)$

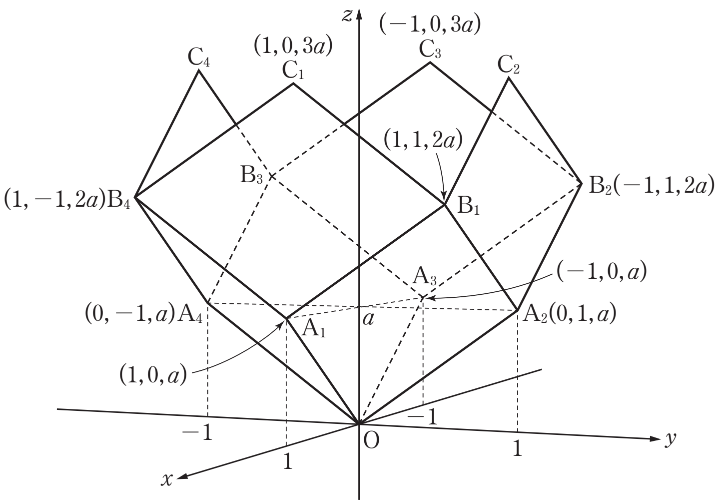
$\overrightarrow{OC_3}=\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{B_2C_3}=\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{A_3B_3}=\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OA_4}=(-1,\ 1,\ 2a)+(0,\ -1,\ a)$

$=(-1,\ 0,\ 3a)$

よって，$C_3(-1,\ 0,\ 3a)$

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=(1,\ 0,\ a)\cdot(-1,\ 1,\ 2a)=2a^2-1$　（⑧）

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{B_2C_3}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_4}=(1,\ 0,\ a)\cdot(0,\ -1,\ a)=a^2$　（③）



(2)　(1)と同様にして，$B_1(1,\ 1,\ 2a)$，$C_1(1,\ 0,\ 3a)$，$B_4(1,\ -1,\ 2a)$ より

$OB_1=\sqrt{1^2+1^2+(2a)^2}=\sqrt{4a^2+2}$，　$A_1A_2=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$A_1C_1=2a=\sqrt{4a^2}<OB_1$

よって　$A_1C_1=A_1A_2$ より　$2a=\sqrt{2}$　　　$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

このとき　$OB_1=2$，$B_1B_4=2$ より　$OB_1=B_1B_4$

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}=(1,\ 0,\ a)\cdot(1,\ 0,\ a)=1+a^2=1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=(1,\ 0,\ a)\cdot(0,\ 1,\ a)=a^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

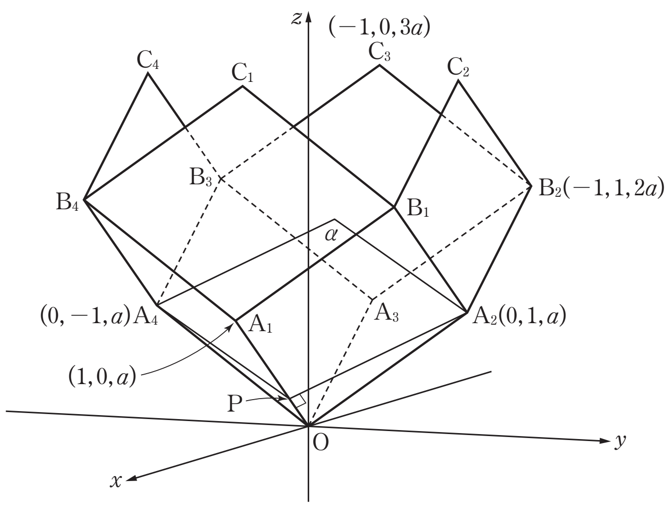
$\overrightarrow{PA_2}$ と $\overrightarrow{OA_1}$ が垂直であることから

$\overrightarrow{PA_2}\cdot\overrightarrow{OA_1}=(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OA_1}=(\overrightarrow{OA_2}-s\overrightarrow{OA_1})\cdot\overrightarrow{OA_1}$

$=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}-s\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}$

$=\dfrac{1}{2}-s\cdot\dfrac{3}{2}=0$　　　よって　$s=\dfrac{1}{3}$

(3)



(2)より $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\left(\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{a}{3}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{B_2C_3}}=(-1,\ 1,\ 2a)+t(0,\ -1,\ a)=(-1,\ -t+1,\ at+2a)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(-\dfrac{4}{3},\ -t+1,\ at+\dfrac{5}{3}a\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ が垂直であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\left(-\frac{4}{3},\ -t+1,\ at+\frac{5}{3}a\right)\cdot(1,\ 0,\ a)=-\frac{4}{3}+a^2t+\frac{5}{3}a^2$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}t+\frac{5}{6}=0$$

よって　$t=1$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}+\overrightarrow{\mathrm{B_2C_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OC_3}}$ より，点 $\mathrm{C_3}$ は平面 α 上の点 Q と一致する。

したがって，点 $\mathrm{C_3}$ は平面 α 上（⓪）にある。

$\overrightarrow{\mathrm{C_3B_2}}=\overrightarrow{\mathrm{A_4O}}$ であり，$\mathrm{C_3}$，$\mathrm{A_4}$ はともに平面 α 上の点，点 O は平面 α を境に O を含む側にあることから，点 $\mathrm{B_2}$ は α を境に O を含む側（①）にある。

補　　　講

スタディサプリ　共通テスト直前対策講座　数学ⅡＢについて

この講座は，大学入学共通テストおよびセンター試験の「過去問題」を通じて，みなさんの実力をチェックし，底上げをするというコンセプトで作りました。この講座を見る頃は，おそらくほぼ全員の人が共通テストの過去問題を解いたことがあるでしょう。では，今一度，次のことを思い返してください。

・いつその過去問題を解きましたか？　まだ実力が伴っていない時期ではないですか？
・どのようなやり方で解きましたか？　今でも同じ解法を取りますか？
・解き直しをしましたか？　それぞれの大問は最後まで解き切りましたか？

１つでも「あ……」と思った人，この講座は，そんなあなたのためにあります。

あなたの「今の」実力が，大学入学共通テストがあなたに要求している資質・能力に対し，どこまで到達していて，どの部分が上回っているのか，または下回っているのか，あなたの予習と動画講義を通じてチェックすることで，あなたの実力が分野毎に整理されます。到達している，または上回っていれば，あとは演習あるのみ，そうでなければ，各分野を見直す最後のチャンスです。

直前期だからこそできる，「あなたの課題」の発見と克服。この講座に，得点アップのカギが隠されています。あなたならではのそのカギを発見してください。

山内　恵介

―　目次　―

第１講　三角関数
第２講　指数関数・対数関数
第３講　微分法・積分法
第４講　数列
第５講　ベクトル

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから動画講義に臨んでください。講義は予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　三角関数

1　k を正の定数として

$$\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=0 \quad \cdots\cdots①$$

を満たす x について考える。

(1)　$0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x の個数について考えよう。

①の両辺に $\sin^2 x\cos^2 x$ をかけ，２倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{ア}}}-k\right)\cos 2x=0 \quad \cdots\cdots②$$

を得る。したがって，k の値に関係なく，$x=\frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ のときはつねに①が成り立つ。

また，$0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で $0<\sin^2 2x\leqq 1$ であるから，$k>\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のとき，①を満たす x は $\frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ のみである。一方，$0<k<\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のとき，①を満たす x の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個であり，$k=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のときは $\boxed{\text{カ}}$ 個である。

（次ページに続く。）

(2)　$k=\dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x について考えよう。

②により $\sin 2x=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ であるから

$$\cos 2x=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$$

である。したがって

$$\cos x=\dfrac{\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$$

である。

2　関数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 3x$ について考える。

(1)　三角関数の加法定理および合成を用いると

$$f(x)=-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin 3x+\frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos 3x$$

$$=\boxed{\text{オ}}\sin\left(3x+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)$$

と表される。ただし，$0<\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi\leqq 2\pi$ とする。

したがって，$f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$ である。また，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものは $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である。

（次ページに続く。）

(2)　$f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で考えたとき，実数 t に対して $f(x)=t$ となる x の値の個数 N を調べよう。$3x+\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi$ のとり得る値の範囲に注意すると，次のことがわかる。

$|t|>$ $\boxed{ク}$ のとき，$N=$ $\boxed{サ}$ である。

$t=$ $\boxed{ク}$ のとき，$N=$ $\boxed{シ}$ である。

$t=f(0)$ のとき，$N=$ $\boxed{ス}$ である。

$|t|<$ $\boxed{ク}$ かつ $t \neq f(0)$ のとき，$N=$ $\boxed{セ}$ である。

$t=-$ $\boxed{ク}$ のとき，$N=$ $\boxed{ソ}$ である。

3　座標平面上の原点を中心とする半径１の円周上に３点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$Q(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$R(\cos\beta,\ \sin\beta)$ がある。ただし，$0\leqq\theta<\alpha<\beta<2\pi$ とする。このとき，s と t を次のように定める。

$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta,\quad t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta$$

(1)　△PQR が正三角形や二等辺三角形のときの s と t の値について考察しよう。

考察１

△PQR が正三角形である場合を考える。

この場合，α，β を θ で表すと

$$\alpha=\theta+\frac{\boxed{\text{ア}}}{3}\pi,\quad \beta=\theta+\frac{\boxed{\text{イ}}}{3}\pi$$

であり，加法定理により

$$\cos\alpha=\boxed{\text{ウ}},\quad \sin\alpha=\boxed{\text{エ}}$$

である。同様に，$\cos\beta$ および $\sin\beta$ を，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表すことができる。

これらのことから，$s=t=\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　①　$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$

②　$\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　③　$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$

④　$-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　⑤　$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$

⑥　$-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　⑦　$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$

（次ページに続く。）

考察２

△PQR が PQ＝PR となる二等辺三角形である場合を考える。

例えば，点 P が直線 $y=x$ 上にあり，点 Q，R が直線 $y=x$ に関して対称であるときを考える。このとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である。また，α は $\alpha<\dfrac{5}{4}\pi$，β は $\dfrac{5}{4}\pi<\beta$ を満たし，点 Q，R の座標について，$\sin\beta=\cos\alpha$，$\cos\beta=\sin\alpha$ が成り立つ。よって

$$s=t=\frac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

である。

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{\boxed{ク}}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{\boxed{ケ}}\right)$$

である。したがって

$$\alpha=\frac{\boxed{コサ}}{12}\pi,\ \beta=\frac{\boxed{シス}}{12}\pi$$

のとき，$s=t=0$ である。

（次ページに続く。）

(2) 次に，s と t の値を定めたときの θ，α，β の関係について考察しよう。

考察３

$s=t=0$ の場合を考える。

この場合，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ により，α と β について考えると

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

同様に，θ と α について考えると

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であるから，θ，α，β の範囲に注意すると

$$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$$

という関係が得られる。

（次ページに続く。）

(3) これまでの考察を振り返ると，次の⓪～③のうち，正しいものは［テ］であることがわかる。

［テ］の解答群

⓪ △PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

① △PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であるが，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

② △PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があるが，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

③ △PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があり，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

第２講　指数関数・対数関数

1　c を正の定数として，不等式

$$x^{\log_3 x} \geqq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

を考える。

3 を底とする①の両辺の対数をとり，$t=\log_3 x$ とおくと

$$t^{\boxed{ア}}-\boxed{イ}\,t+\boxed{イ}\log_3 c \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

となる。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

$c=\sqrt[3]{9}$ のとき，①を満たす x の値の範囲を求めよう。②により

$$t \leqq \boxed{ウ},\quad t \geqq \boxed{エ}$$

である。さらに，真数の条件を考えて

$$\boxed{オ} < x \leqq \boxed{カ},\quad x \geqq \boxed{キ}$$

となる。

（次ページに続く。）

次に，①が $x >$ オ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求めよう。

x が $x >$ オ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は **ク** である。

ク に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　正の実数全体　　①　負の実数全体
②　実数全体　　③　1 以外の実数全体

この範囲の t に対して，②がつねに成り立つための必要十分条件は，$\log_3 c \geqq \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。すなわち，$c \geqq \sqrt[\boxed{サ}]{\boxed{シス}}$ である。

2　関数 $y=-2^{2x}+2^{x+4}-48$ について考える。

(1)　$t=2^x$ とおく。y を t の式で表すと

$$y=\boxed{ア}\left(t-\boxed{イ}\right)^2+\boxed{ウエ}$$

となる。

$x=1$ のとき，$y=\boxed{オカキ}$ である。$x\geqq 1$ のとき，y は $x=\boxed{ク}$ で最大値 $\boxed{ケコ}$ をとる。

(2)　$k>1$ とする。x が $1\leqq x\leqq k$ の範囲を動くとき，y の最小値が $\boxed{オカキ}$ であるような k の値の範囲は

$$1<k\leqq \log_2\boxed{サシ}$$

である。この範囲に含まれる最大の整数の値は $\boxed{ス}$ である。

（次ページに続く。）

(3)　$y=0$ を満たす x は二つある。そのうちの小さい方は $\boxed{\text{セ}}$ である。また，大きい方は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つ選べ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

⓪　$1<x<1.2$	①　$1.2<x<1.3$	②　$1.5<x<1.6$
③　$2.4<x<2.5$	④　$2.5<x<2.6$	⑤　$2.6<x<2.8$
⑥　$3.5<x<3.6$	⑦　$3.6<x<3.8$	⑧　$4.2<x<4.4$
⑨　$x>10$		

3

(1)　$\log_{10}10=$ ア である。また，$\log_{10}5$，$\log_{10}15$ をそれぞれ $\log_{10}2$ と $\log_{10}3$ を用いて表すと

$\log_{10}5=$ イ $\log_{10}2+$ ウ

$\log_{10}15=$ エ $\log_{10}2+\log_{10}3+$ オ

となる。

（次ページに続く。）

(2) 太郎さんと花子さんは，15^{20} について話している。
以下では，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

太郎：15^{20} は何桁の数だろう。
花子：15 の 20 乗を求めるのは大変だね。$\log_{10}15^{20}$ の整数部分に着目してみようよ。

$\log_{10}15^{20}$ は

$$\boxed{カキ}<\log_{10}15^{20}<\boxed{カキ}+1$$

を満たす。よって，15^{20} は $\boxed{クケ}$ 桁の数である。

太郎：15^{20} の最高位の数字も知りたいね。だけど，$\log_{10}15^{20}$ の整数部分にだけ着目してもわからないな。
花子：$N\cdot10^{\boxed{カキ}}<15^{20}<(N+1)\cdot10^{\boxed{カキ}}$ を満たすような正の整数 N に着目してみたらどうかな。

$\log_{10}15^{20}$ の小数部分は $\log_{10}15^{20}-\boxed{カキ}$ であり

$$\log_{10}\boxed{コ}<\log_{10}15^{20}-\boxed{カキ}<\log_{10}\left(\boxed{コ}+1\right)$$

が成り立つので，15^{20} の最高位の数字は $\boxed{サ}$ である。

第３講　微分法・積分法

1　a，b，c を実数とし，関数 $f(x)=x^3-1$，$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，曲線 $y=g(x)$ を C_2 とする。C_2 は点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$ を通り，C_2 の A における接線は C_1 の A における接線と一致するものとする。

(1)　曲線 C_1 の点 A における接線を ℓ とする。$f'(-1)=$ **ア** により，ℓ の方程式は

$y=$ **イ** $x+$ **ウ** である。また，原点 O と直線 ℓ の距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2)　曲線 C_2 の点 A における接線は(1)の直線 ℓ と一致しているので，$g'(-1)=$ **カ** である。したがって，b，c を a を用いて表すと，$b=$ **キ** a，$c=$ **ク** $-$ **ケ** となる。

（次ページに続く。）

(3)　$a=-2$ のとき，関数 $g(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{スセソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ をとり，

$x=\boxed{\text{ツ}}$ で極小値 $\boxed{\text{テトナ}}$ をとる。

(4)　$a<0$ とする。$-2\leqq x\leqq -1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x=-2$ で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また，$-1\leqq x\leqq 1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S=S_1+S_2$ とおくと，$S=\boxed{\text{ニ}}$ と表される。$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$\displaystyle\int_{-2}^{-1}\{g(x)-f(x)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

①　$\displaystyle\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,dx$

②　$\displaystyle\int_{-2}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,dx$

③　$\displaystyle\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

これを計算することにより，$S=\boxed{\text{ヌネ}}\,a$ となる。

2

〔1〕 a を実数とし，$f(x)=(x-a)(x-2)$ とおく。また，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とする。

(1) $a=1$ のとき，$F(x)$ は $x=$ [ア] で極小になる。

(2) $a=$ [イ] のとき，$F(x)$ はつねに増加する。また，$F(0)=$ [ウ] であるから，$a=$ [イ] のとき，$F(2)$ の値は [エ] である。

[エ] の解答群

⓪ 0	① 正	② 負

（次ページに続く。）

(3)　$a >$ [イ] とする。

b を実数とし，$G(x)=\int_b^x f(t)\,dt$ とおく。

関数 $y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを [オ] 方向に [カ] だけ平行移動したものと一致する。また，$G(x)$ は $x=$ [キ] で極大になり，$x=$ [ク] で極小になる。

$G(b)=$ [ケ] であるから，$b=$ [キ] のとき，曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は [コ] 個である。

[オ] の解答群

⓪　x 軸	①　y 軸

[カ] の解答群

⓪　b	①　$-b$	②　$F(b)$
③　$-F(b)$	④　$F(-b)$	⑤　$-F(-b)$

（次ページに続く。）

〔2〕 $g(x)=|x|(x+1)$ とおく。

点 P$(-1,\ 0)$ を通り，傾きが c の直線を ℓ とする。$g'(-1)=$ **サ** であるから，$0<c<$ サ のとき，曲線 $y=g(x)$ と直線 ℓ は 3 点で交わる。そのうちの 1 点は P であり，残りの 2 点を点 P に近い方から順に Q，R とすると，点 Q の x 座標は **シス** であり，点 R の x 座標は **セ** である。

（次ページに続く。）

また，$0<c<$ [サ] のとき，線分 PQ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とし，線分 QR と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$S=\frac{\boxed{ソ}c^3+\boxed{タ}c^2-\boxed{チ}c+1}{\boxed{ツ}}$$

$$T=c^{\boxed{テ}}$$

である。

第４講　数　列

1　初項 a_1 が 1 であり，次の条件①，②によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考えよう。

$a_{2n}=a_n$　　　　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　……………………………①

$a_{2n+1}=a_n+a_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　……………………………②

(1)　①により $a_2=a_1$ となるので $a_2=1$ であり，②により $a_3=a_1+a_2$ となるので $a_3=2$ である。同様に

$a_4=$ [ア]，$a_5=$ [イ]，$a_6=$ [ウ]，$a_7=$ [エ]

である。

また，a_{18} については，$a_{18}=a_9$ により $a_{18}=$ [オ] であり，a_{38} については，$a_{38}=a_{19}=a_9+a_{10}$ により $a_{38}=$ [カ] である。

(2)　k を自然数とする。①により $\{a_n\}$ の第 $3\cdot2^k$ 項は [キ] である。

（次ページに続く。）

(3)　数列 $\{a_n\}$ の第 3 項以降を次のように群に分ける。ただし，第 k 群は 2^k 個の項からなるものとする。

第1群	第2群	第3群	
a_3，a_4	a_5，a_6，a_7，a_8	a_9，…，a_{16}	a_{17}，…

2 以上の自然数 k に対して，$\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} 2^j =$ [ク]$^{[ケ]}$－[コ] なので，第 k 群の最初の項は，$\{a_n\}$ の第 $\left([ク]^{[ケ]}+[サ]\right)$ 項であり，第 k 群の最後の項は，$\{a_n\}$ の第 [ク]$^{[シ]}$ 項である。ただし，[ケ]，[シ] については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$k-2$　　①　$k-1$　　②　k　　③　$k+1$　　④　$k+2$

第 k 群に含まれるすべての項の和を S_k，第 k 群に含まれるすべての奇数番目の項の和を T_k，第 k 群に含まれるすべての偶数番目の項の和を U_k とする。たとえば

$S_1=a_3+a_4$，　$T_1=a_3$，　$U_1=a_4$

$S_2=a_5+a_6+a_7+a_8$，　$T_2=a_5+a_7$，　$U_2=a_6+a_8$

であり

$S_1=$ [ス]，　$S_2=$ [セ]，　$T_2=$ [ソ]，　$U_2=$ [タ]

である。

(次ページに続く。)

(4) (3)で定めた数列 $\{S_k\}$，$\{T_k\}$，$\{U_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよう。

①により $U_{k+1}=$ [チ] となる。また，$\{a_n\}$ の第 2^k 項と第 2^{k+1} 項が等しいことを用いると，②により $T_{k+1}=$ [ツ] となる。したがって，$S_{k+1}=T_{k+1}+U_{k+1}$ を用いると，$S_{k+1}=$ [テ] となる。[チ]，[ツ]，[テ] に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ S_k　　① S_k+3k　　② T_k

③ U_k　　④ $2S_k$　　⑤ $2T_k$

⑥ $2T_k+2k-1$　　⑦ $2T_k+k(k+1)$　　⑧ $3S_k$

⑨ $3S_k+(k-1)(k-2)$

（次ページに続く。）

以上のことから

$S_k=$ ト ，$T_k=$ ナ ，$U_k=$ ニ

である。 ト ， ナ ， ニ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $2k^2-4k+3$　　① 3^{k-1}

② $2^{k+1}-2k-1$　　③ $2^{k+2}-2k^2-5$

④ $4k^2-8k+6$　　⑤ $2\cdot 3^{k-1}$

⑥ $2^{k+2}-4k-2$　　⑦ $2^{k+3}-4k^2-10$

⑧ $6k^2-12k+9$　　⑨ 3^k

ⓐ $3\cdot 2^{k+1}-6k-3$　　ⓑ $3\cdot 2^{k+2}-6k^2-15$

2

〔1〕 自然数 n に対して，$S_n=5^n-1$ とする。さらに，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が S_n であるとする。このとき，$a_1=$ ア である。また，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{\,n-1}$$

である。この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

上で求めたことから，すべての自然数 n に対して

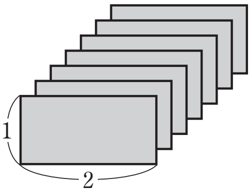
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}\left(1-\boxed{\text{キ}}^{\,-n}\right)$$

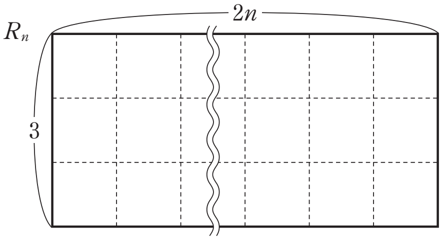
が成り立つことがわかる。

（次ページに続く。）

〔2〕 太郎さんは和室の畳を見て，畳の敷(し)き方が何通りあるかに興味を持った。ちょうど手元にタイルがあったので，畳をタイルに置き換えて，数学的に考えることにした。

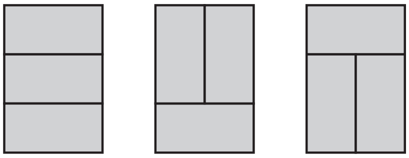
縦の長さが1，横の長さが2の長方形のタイルが多数ある。それらを縦か横の向きに，隙間(すきま)も重なりもなく敷き詰めるとき，その敷き詰め方をタイルの「配置」と呼ぶ。



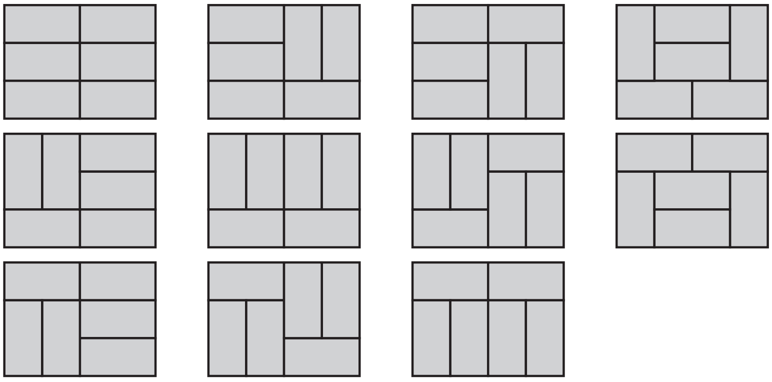


上の図のように，縦の長さが3，横の長さが $2n$ の長方形を R_n とする。$3n$ 枚のタイルを用いた R_n 内の配置の総数を r_n とする。

$n=1$ のときは，下の図のように $r_1=3$ である。

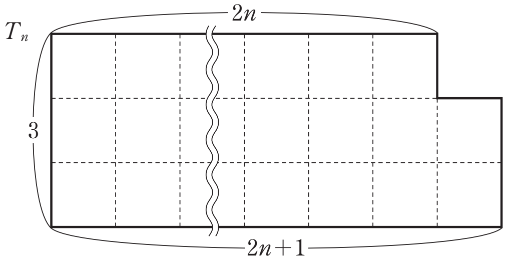


また，$n=2$ のときは，下の図のように $r_2=11$ である。



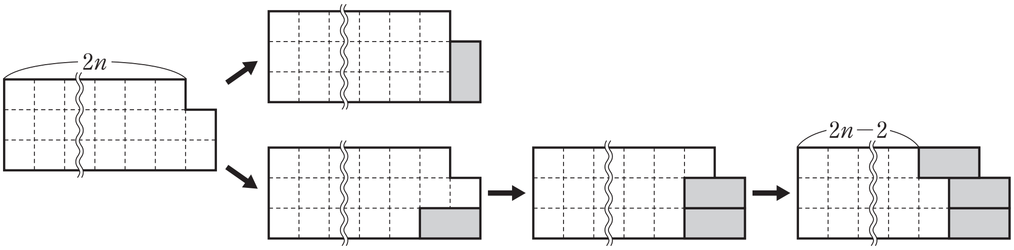
（次ページに続く。）

(1)　太郎さんは次のような図形 T_n 内の配置を考えた。



$(3n+1)$ 枚のタイルを用いた T_n 内の配置の総数を t_n とする。$n=1$ のときは，$t_1=$ [ク] である。

さらに，太郎さんは T_n 内の配置について，右下隅（すみ）のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。



この図から，2 以上の自然数 n に対して

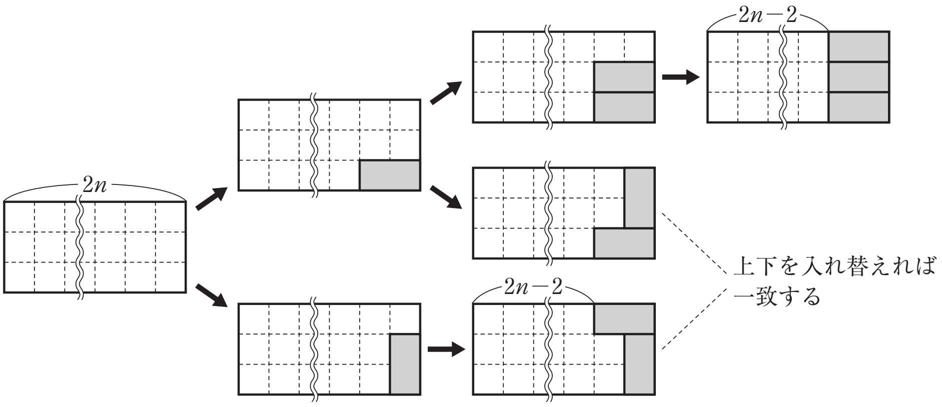
$$t_n=Ar_n+Bt_{n-1}$$

が成り立つことがわかる。ただし，$A=$ [ケ]，$B=$ [コ] である。

以上から，$t_2=$ [サシ] であることがわかる。

（次ページに続く。）

同様に，R_n の右下隅のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。



この図から，2 以上の自然数 n に対して

$$r_n = Cr_{n-1} + Dt_{n-1}$$

が成り立つことがわかる。ただし，$C=$ **ス** ，$D=$ **セ** である。

(2)　畳を縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形とみなす。縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は **ソタ** である。

また，縦の長さが 3，横の長さが 8 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は **チツテ** である。

第５講　ベクトル

1　1辺の長さが1のひし形ABCDにおいて，$\angle\mathrm{BAD}>90^\circ$ とする。直線BC上に，点Cとは異なる点Eを，$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=1$ を満たすようにとる。以下，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{q}$ とし，$\vec{p}\cdot\vec{q}=x$ とおく。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2=$ **ア** $-$ **イ** x である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ は平行なので，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{p}+s\vec{q}$ と表すことができる。

$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=1$ であることと，点Eは点Cと異なる点であることにより，

$s=$ **ウエ** $x+$ **オ** である。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ を満たす x の値を求めよう。

(2)により，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{p}+\left(\boxed{\text{ウエ}}\,x+\boxed{\text{オ}}\right)\vec{q}$ である。$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ と $\angle\mathrm{BAD}>90^\circ$

により，$x=\dfrac{\boxed{\text{カ}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ が得られる。

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{p}+\frac{\boxed{\text{ケ}}+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{q}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

である。

（次ページに続く。）

(4)　x を(3)で求めた値とし，点 F を直線 AC に関して点 E と対称な点とする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|$ を求めよう。

点 B と点 D が直線 AC に関して対称な点であることに注意すると，①により，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{\boxed{シ}+\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}\vec{p}+\vec{q}$$ と表せる。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\frac{\boxed{ソタ}+\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$$ である。

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|$ であり，(2)により $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\left(\boxed{ウエ}\,x+\boxed{オ}\right)\vec{q}$ となるので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\frac{\boxed{テ}+\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$$ を得る。ゆえに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|=\boxed{ニ}$ である。

(5)　x を(3)で求めた値とし，点 R を △ABD の外接円の中心とする。$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を用いて表そう。

△ABD は AB＝AD を満たす二等辺三角形であるから，点 R は直線 AC 上にある。点 F を(4)で定めた点とし，線分 AD の中点を M とする。(4)の結果を用いることにより，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FM}}$ は垂直であることが確かめられる。よって，点 R は直線 AC と直線 FM の交点であり，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表すことができる。t を求めることにより，$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{\boxed{ヌ}+\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノハ}}(\vec{p}+\vec{q})$$ が得られる。

2　O を原点とする座標空間に 2 点 A$(-1,\ 2,\ 0)$，B$(2,\ p,\ q)$ がある。ただし，$q>0$ とする。線分 AB の中点 C から直線 OA に引いた垂線と直線 OA の交点 D は，線分 OA を 9：1 に内分するものとする。また，点 C から直線 OB に引いた垂線と直線 OB の交点 E は，線分 OB を 3：2 に内分するものとする。

(1)　点 B の座標を求めよう。

$|\overrightarrow{OA}|^2=$ **ア** である。また，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウエ}}\overrightarrow{OA}$ であることにより，

$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OA}-\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{OB}$ と表される。$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CD}$ から

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ **ケ**　……………………………①

である。同様に，$\overrightarrow{CE}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CE}$ から

$|\overrightarrow{OB}|^2=20$　……………………………②

を得る。

①と②，および $q>0$ から，B の座標は $\left(2,\ \boxed{コ},\ \sqrt{\boxed{サ}}\right)$ である。

（次ページに続く。）

(2)　3点O，A，Bの定める平面をαとし，点$(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$をGとする。また，α上に点Hを$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$が成り立つようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表そう。

Hがα上にあることから，実数s，tを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\boxed{\text{シ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。これと，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$および$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$が成り立つことから，$s=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，

$t=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$が得られる。ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる。また，このことから，Hは$\boxed{\text{ツ}}$であることがわかる。

$\boxed{\text{ツ}}$の解答群

⓪　三角形OACの内部の点
①　三角形OBCの内部の点
②　点O，Cと異なる，線分OC上の点
③　三角形OABの周上の点
④　三角形OABの内部にも周上にもない点

テキスト解答

【講義問題の略解】

※動画講義の内容を補完するものです。記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません。ご了承ください。

第１講　三角関数

1 (1) $\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=0$ ……①

$\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}=-\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}$ より

$\cos^2 x-\sin^2 x-k\left(\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\right)=0$

$(\cos^2 x-\sin^2 x)\left(1-\dfrac{k}{\cos^2 x\sin^2 x}\right)=0$

$(\cos^2 x-\sin^2 x)(\sin^2 x\cos^2 x-k)=0$

$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$，$\sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$ より

$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k\right)\cos 2x=0$ ……②

よって，$\dfrac{\sin^2 2x}{4}=k$ または $\cos 2x=0$ である。

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，つまり $0<2x<\pi$ の範囲において $\cos 2x=0$ を満たすのは $2x=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $x=\dfrac{\pi}{4}$ のときであり，このときつねに②，すなわち①が成り立つ。

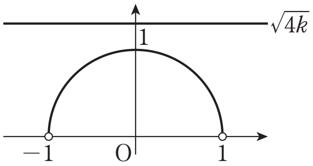
また，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，つまり $0<2x<\pi$ の範囲において，$0<\sin 2x\leqq 1$，すなわち $0<\sin^2 2x\leqq 1$ であるから，$\dfrac{\sin^2 2x}{4}=k$，つまり $\sin^2 2x=4k$ より $\sin 2x=+\sqrt{4k}$ を満たす x の個数は

$4k>1$ つまり $k>\dfrac{1}{4}$ のとき　0 個

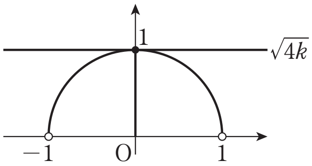
$4k=1$ つまり $k=\dfrac{1}{4}$ のとき　$\sin 2x=1$ より $2x=\dfrac{\pi}{2}$　よって $x=\dfrac{\pi}{4}$ の 1 個

$0<4k<1$ つまり $0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき　2 個　$\left(k\fallingdotseq\dfrac{1}{4}\text{ より }x\fallingdotseq\dfrac{\pi}{4}\right)$

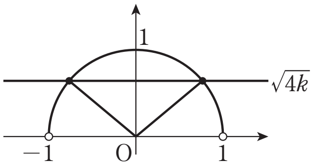
$k>\frac{1}{4}$のとき



$k=\frac{1}{4}$のとき



$0<k<\frac{1}{4}$のとき



したがって，①を満たす x の個数は

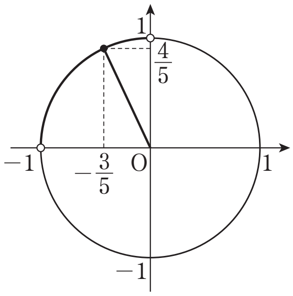
$k>\frac{1}{4}$ のとき　１個　　$0<k<\frac{1}{4}$ のとき　３個　　$k=\frac{1}{4}$ のとき　１個

(2)　$k=\frac{4}{25}$ のとき，②より $\left(\frac{\sin^2 2x}{4}-\frac{4}{25}\right)\cos 2x=0$

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ つまり $\frac{\pi}{2}<2x<\pi$ のとき，$\cos 2x \neq 0$

よって，$\frac{\sin^2 2x}{4}=\frac{4}{25}$

$$\sin^2 2x=\frac{16}{25}$$



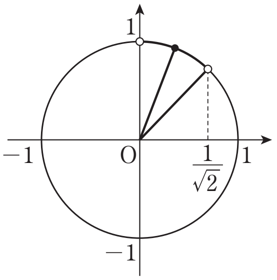
$\frac{\pi}{2}<2x<\pi$ より $0<\sin 2x<1$　　よって，$\sin 2x=+\frac{4}{5}$

このとき，$\cos 2x=-\sqrt{1-\sin^2 2x}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

よって，$2\cos^2 x-1=-\frac{3}{5}$　　$\cos^2 x=\frac{1}{5}$

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ より $0<\cos x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$\cos x=+\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$



2 (1)　$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 3x$

$$=\sqrt{3}\left(\cos 3x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 3x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 3x$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x\right)+\sqrt{3}\cos 3x$$

$$=-\frac{3}{2}\sin 3x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos 3x$$

$$=3\left\{\sin 3x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos 3x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$=3\sin\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

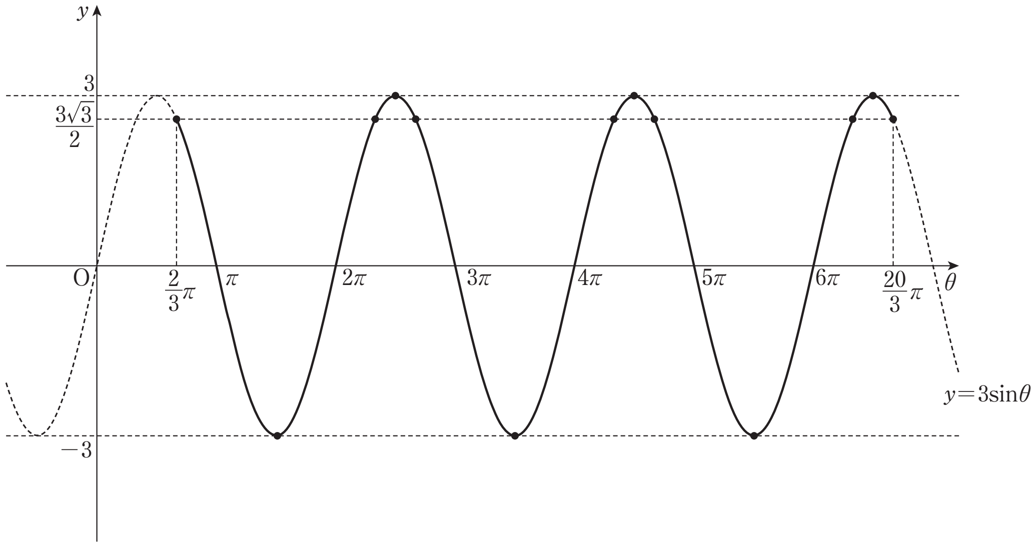
$-1\leqq\sin\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)\leqq 1$ より，$-3\leqq 3\sin\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)\leqq 3$

よって，$f(x)$ の最大値は 3 である。

また，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものは $2\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$ である。

(2)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ より $0\leqq 3x\leqq 6\pi$　つまり $\dfrac{2}{3}\pi\leqq 3x+\dfrac{2}{3}\pi\leqq\dfrac{20}{3}\pi$

よって，$3x+\dfrac{2}{3}\pi=\theta$ とおくと，$y=3\sin\theta\ \left(\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{20}{3}\pi\right)$ のグラフは以下。



$f(x)=t\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ となる x の値の個数は，$y=3\sin\theta\ \left(\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{20}{3}\pi\right)$ と $y=t$ のグラフの共有点の個数 N に等しい。したがって，

$|t|>3$ のとき，$N=0$

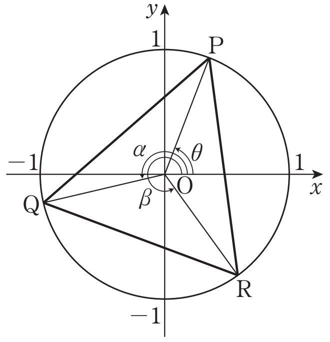
$t=3$ のとき，$N=3$

$t=f(0)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ のとき，$N=7$

$|t|<3$ かつ $t\neq f(0)$ のとき，$N=6$

$t=-3$ のとき，$N=3$

3 (1)　考察１について



△PQR が正三角形である場合，$\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{3}$ より

$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$\alpha=\theta+\dfrac{2}{3}\pi$

同様に，$\angle\mathrm{QOR}=\dfrac{2}{3}\pi$ より，$\beta=\theta+\dfrac{4}{3}\pi$

加法定理により

$$\cos\alpha=\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{2}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\ (⑦)$$

$$\sin\alpha=\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\ (④)$$

同様に

$$\cos\beta=\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{4}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$$

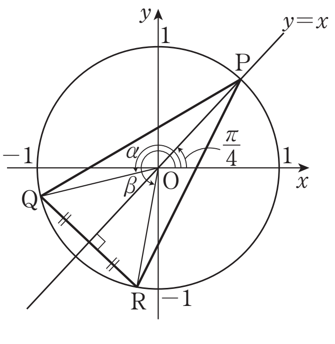
$$\sin\beta=\sin\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{4}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

これらのことから

$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta$$
$$=\cos\theta+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)=0$$

$$t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta$$
$$=\sin\theta+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=0$$

より，$s=t=0$ である。



考察２について，$Q(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$R(\cos\beta,\ \sin\beta)$ が直線 $y=x$ に関して対称であるから，$\sin\beta=\cos\alpha$，$\cos\beta=\sin\alpha$ が成り立つ。よって

$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha+\sin\alpha$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\alpha+\cos\alpha$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

したがって，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

である。したがって

$$s=t=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$s=t=0$ のとき

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{5}{4}\pi$ より $\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi$

よって，$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi$ より $\alpha=\frac{11}{12}\pi$

また，$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}\pi$ より，$\beta=\frac{5}{2}\pi-\alpha=\frac{5}{2}\pi-\frac{11}{12}\pi=\frac{19}{12}\pi$

(2)　$s=t=0$ のとき

$\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=0$ より $\cos\theta=-\cos\alpha-\cos\beta$

$\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=0$ より $\sin\theta=-\sin\alpha-\sin\beta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$(-\sin\alpha-\sin\beta)^2+(-\cos\alpha-\cos\beta)^2=1$

$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=1$

よって，$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$　……①

同様に，$\cos\beta=-\cos\theta-\cos\alpha$，$\sin\beta=-\sin\theta-\sin\alpha$，$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より

$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=-\frac{1}{2}$　……②

①より　$\cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}$　　　②より　$\cos(\alpha-\theta)=-\frac{1}{2}$

よって，$\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\theta)=-\frac{1}{2}$

ここで，$0\leqq\theta<\alpha<\beta<2\pi$ より，$0<\beta-\alpha<2\pi$，$0<\alpha-\theta<2\pi$

よって，$\beta-\alpha$ および $\alpha-\theta$ は $\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$ のいずれかである。

$\theta+(\beta-\alpha)+(\alpha-\theta)<2\pi$ より，$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi$

(3)　考察１より，△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ である。

また，考察３より

$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi$ であるから，$\angle\mathrm{QOR}=\angle\mathrm{POQ}=\frac{2}{3}\pi$

よって，$\angle\mathrm{QPR}=\angle\mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{3}$ であり，$\angle\mathrm{RQP}=\frac{\pi}{3}$ であるから，△PQR は正三角形である。

したがって，$s=t=0$ ならば，△PQR は正三角形である。

以上より，△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である（⓪）。

（参考）

考察２の結果について，

$\theta=\frac{\pi}{4}$，$\alpha=\frac{11}{12}\pi$ より，$\angle\mathrm{POQ}=\alpha-\theta=\frac{11}{12}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi$

$\alpha=\dfrac{11}{12}\pi$，$\beta=\dfrac{19}{12}\pi$ より，$\angle \mathrm{QOR}=\beta-\alpha=\dfrac{19}{12}\pi-\dfrac{11}{12}\pi=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$\angle \mathrm{PRQ}=\angle \mathrm{QPR}=\dfrac{\pi}{3}$ であり，PQ＝PR であるから，△PQR は正三角形である。

第２講　指数関数・対数関数

1　$x^{\log_3 x} \geqq \left(\dfrac{x}{c}\right)^3$　$(c>0)$　……①

①の真数条件より $x>0$ であるから，①の両辺はともに正である。

よって，3 を底とする①の両辺の対数をとると

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geqq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3$$

$$(\log_3 x)(\log_3 x) \geqq 3\log_3 \frac{x}{c}$$

$$(\log_3 x)^2 \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

$t=\log_3 x$ とおくと

$t^2 \geqq 3(t-\log_3 c)$　よって，$t^2-3t+3\log_3 c \geqq 0$　……②

$c=\sqrt[3]{9}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$ のとき，$3\log_3 c=3\log_3 3^{\frac{2}{3}}=3\times\dfrac{2}{3}=2$ より，②は

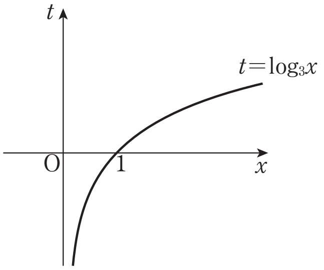
$t^2-3t+2\geqq 0$　　$(t-1)(t-2)\geqq 0$　　よって，$t\leqq 1$，$t\geqq 2$

つまり，$\log_3 x\leqq 1$，$\log_3 x\geqq 2$ より，$x\leqq 3$，$x\geqq 9$

これと，真数条件 $x>0$ より，$0<x\leqq 3$，$x\geqq 9$

次に，①が $x>0$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求める。

x が $x>0$ の範囲を動くとき，$t=\log_3 x$ のとり得る値の範囲は実数全体（②）である。



$$(\text{②の左辺})=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3\log_3 c$$

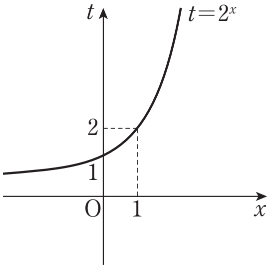
であるから，すべての実数 t で②がつねに成り立つための必要十分条件は

$-\dfrac{9}{4}+3\log_3 c\geqq 0$　つまり　$\log_3 c\geqq \dfrac{3}{4}$ である。

すなわち，$c\geqq 3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}$ である。

2　(1)　$t=2^x$ とおくと

$$\begin{aligned} y&=-2^{2x}+2^{x+4}-48 \\ &=-(2^x)^2+2^4\cdot 2^x-48 \\ &=-t^2+16t-48 \\ &=-(t-8)^2+16 \end{aligned}$$



$x=1$ のとき，$t=2^1=2$　より

$y=-(2-8)^2+16=-20$

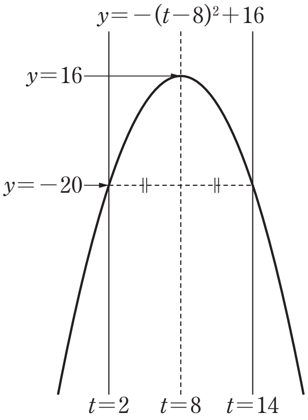
$x\geqq 1$ のとき，$t\geqq 2$ であるから，y は $t=8$，つまり $x=3$ で最大値 16 をとる。

(2)　x が $1 \leqq x \leqq k\ (k>1)$ の範囲を動くとき，t は $2 \leqq t \leqq 2^k$ の範囲を動く。このとき，y の最小値が -20 であるような k の値の範囲は

$$2^1 < 2^k \leqq 14 \text{ より}\quad 1 < k \leqq \log_2 14$$

ここで，$\log_2 8 < \log_2 14 < \log_2 16$ より，$3 < \log_2 14 < 4$

よって，$1 < k \leqq \log_2 14$ に含まれる最大の整数の値は 3 である。



(3)　$y=0$ のとき

$$-(t-8)^2+16=0 \qquad (t-8)^2=16$$

$$t-8=\pm 4 \qquad t=4,\ 12$$

よって，$y=0$ を満たす x は $2^x=4$，$2^x=12$ を満たす x である。

そのうち小さい方は $x=2$ である。

また，大きい方は

$$x=\log_2 12=\log_2 (2^2\cdot 3)=2+\log_2 3$$

$$=2+\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

$$=2+\frac{0.4771}{0.3010}=2+1.585\cdots\cdots=3.585\cdots\cdots$$

よって，大きい方は $3.5<x<3.6$（⑥）を満たす。

3　(1)　$\log_{10} 10=1$

$$\log_{10} 5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10} 10-\log_{10} 2=-\log_{10} 2+1$$

$$\log_{10} 15=\log_{10} (3\cdot 5)=\log_{10} 3+\log_{10} 5=-\log_{10} 2+\log_{10} 3+1$$

(2)　$\log_{10} 15^{20}=20\log_{10} 15=20(-\log_{10} 2+\log_{10} 3+1)=20(-0.3010+0.4771+1)$

$$=20\times 1.1761=23.522$$

したがって，$\log_{10} 15^{20}$ は $23<\log_{10} 15^{20}<23+1$ を満たす。

よって，$10^{23}<15^{20}<10^{24}$ より，15^{20} は 24 桁の数である。

$\log_{10} 15^{20}$ の小数部分は $\log_{10} 15^{20}-23=0.522$ であり，

$$\log_{10} 3=0.4771$$

$$\log_{10} 4=\log_{10} 2^2=2\log_{10} 2=2\times 0.3010=0.6020 \text{ より，}$$

$$\log_{10} 3<\log_{10} 15^{20}-23<\log_{10} (3+1)$$

よって，$\log_{10} 3+23<\log_{10} 15^{20}<\log_{10} 4+23$

$$\log_{10} 3+\log_{10} 10^{23}<\log_{10} 15^{20}<\log_{10} 4+\log_{10} 10^{23}$$

$$\log_{10} 3\cdot 10^{23}<\log_{10} 15^{20}<\log_{10} 4\cdot 10^{23}$$

したがって，$3\cdot 10^{23}<15^{20}<4\cdot 10^{23}$

ゆえに，15^{20} の最高位の数字は 3 である。

第３講　微分法・積分法

1 (1)　$C_1 : f(x)=x^3-1$ より，$f'(x)=3x^2$

C_1 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$ における接線 ℓ の傾きは $f'(-1)=3$

よって，接線 ℓ の方程式は

$y=3(x+1)-2$　　つまり　$y=3x+1$

原点 O と直線 $\ell : 3x-y+1=0$ の距離は

$$\frac{|3\cdot 0-1\cdot 0+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

(2)　曲線 $C_2 : g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ の点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$ における接線が直線 ℓ と一致しているので，$g'(-1)=3$

$g'(x)=3x^2+2ax+b$ より，$g'(-1)=3-2a+b=3$　……①

また，C_2 は点 A を通るので，$g(-1)=-1+a-b+c=-2$　……②

①より，$b=2a$

これを②に代入して整理すると，$c=a-1$ となる。

(3)　$a=-2$ のとき，(2)より $b=-4$，$c=-3$

このとき

$g(x)=x^3-2x^2-4x-3$

$g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

よって，$g(x)$ の増減表は右図。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$g\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-3=-\frac{41}{27}$$

$g(2)=2^3-2\cdot 2^2-4\cdot 2-3=-11$

よって，$g(x)$ は $x=-\frac{2}{3}$ で極大値 $-\frac{41}{27}$ をとり，$x=2$ で極小値 -11 をとる。

(4)　(2)より，$g(x)=x^3+ax^2+2ax+a-1$

このとき

$$\begin{aligned} f(x)-g(x)&=(x^3-1)-(x^3+ax^2+2ax+a-1)\\ &=-ax^2-2ax-a\\ &=-a(x^2+2x+1)\\ &=-a(x+1)^2\geqq 0\quad (\because\ a<0) \end{aligned}$$

等号成立は $x=-1$ のとき

したがって，$f(x)\geqq g(x)$ であることから，$-2\leqq x\leqq -1$ において，曲線 C_1，C_2 および直線 $x=-2$ で囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

と表され，$-1\leqq x\leqq 1$ において，曲線 C_1，C_2 および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積 S_2 は

$S_2=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

と表される。したがって，

$$S=S_1+S_2$$
$$=\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx \quad (③)$$
$$=-a\int_{-2}^{1}(x+1)^2dx$$
$$=-a\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-2}^{1}=-a\left\{\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=-3a$$

2〔１〕

(1)　$a=1$ のとき，$f(x)=(x-1)(x-2)$

$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$

この式の両辺を x で微分すると

$F'(x)=f(x)$

つまり，$F'(x)=(x-1)(x-2)$

よって，$F(x)$ の増減は右表。

x	…	1	…	2	…
$F'(x)$	＋	0	－	0	＋
$F(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$F(x)$ は $x=2$ で極小となる。

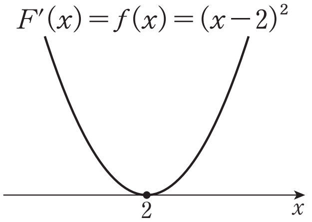
(2)　$F'(x)=f(x)=(x-a)(x-2)$

$F(x)$ がつねに増加するのは，$F'(x)$，つまり

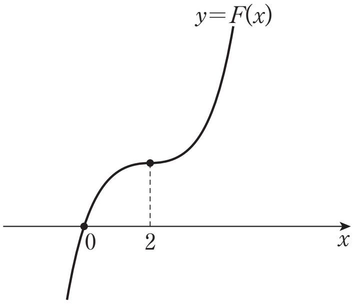
$f(x)=(x-a)(x-2)$ がつねに 0 以上，すなわち

$y=f(x)$ のグラフにおいて x 軸より下の部分が

存在しない場合であり，それは $a=2$ のときである。



また，$F(0)=\int_{0}^{0}f(t)\,dt=0$ であるから，$a=2$ のとき，$F(2)$ の値は正（①）である。



(3)　$a>2$ とする

$G(x)=\int_{b}^{x}f(t)\,dt$

$=\int_{b}^{0}f(t)\,dt+\int_{0}^{x}f(t)\,dt$

$$=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^b f(t)\,dt=F(x)-F(b)$$

よって，$y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを y 軸（①）方向に $-F(b)$（③）だけ平行移動したものと一致する。

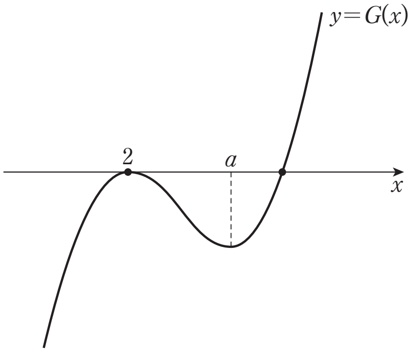
よって，$G'(x)=F'(x)=(x-a)(x-2)$

$a>2$ より，$G(x)$ の増減は右表。

したがって，$G(x)$ は $x=2$ で極大になり，$x=a$ で極小となる。

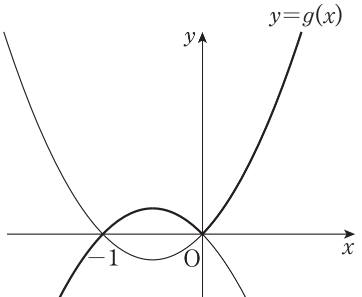
x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また，$G(b)=\int_b^b f(t)\,dt=0$ であるから，$b=2$ のとき $G(2)=0$ である。よって，$b=2$ のとき，曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は２個である。



〔２〕 $g(x)=|x|(x+1)$

$$=\begin{cases}x(x+1)=x^2+x & (x\geqq 0)\\ -x(x+1)=-x^2-x & (x<0)\end{cases}$$



よって，$y=g(x)$ のグラフは右図。

$x<0$ のとき　$g'(x)=-2x-1$ より，

$g'(-1)=-2\cdot(-1)-1=1$

よって，$y=g(x)$ 上の点 P$(-1,\ 0)$ における接線の傾きは１

したがって，$0<c<1$ のとき，曲線 $y=g(x)$ と，点Pを通り傾きが c の直線 ℓ は３点で交わる。

直線 ℓ の方程式は $y=c(x+1)$ より $y=cx+c$

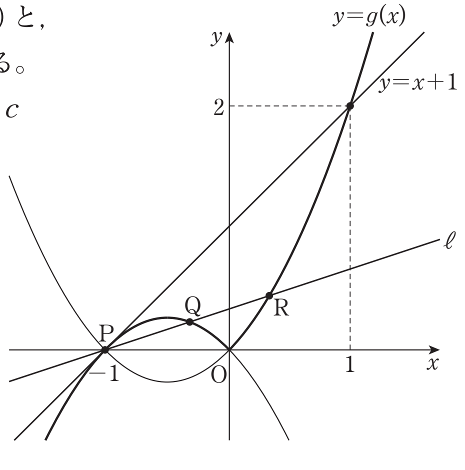
よって，曲線 $y=g(x)$ と直線 ℓ の共有点の x 座標は，$x<0$ のとき

$\begin{cases}y=-x^2-x\\ y=cx+c\end{cases}$ より y を消去して整理すると

$x^2+(c+1)x+c=0$　　$(x+1)(x+c)=0$

$x<0$ より $x=-1,\ -c$

よって，点Qの x 座標は $x=-c$



$x \geqq 0$ のとき

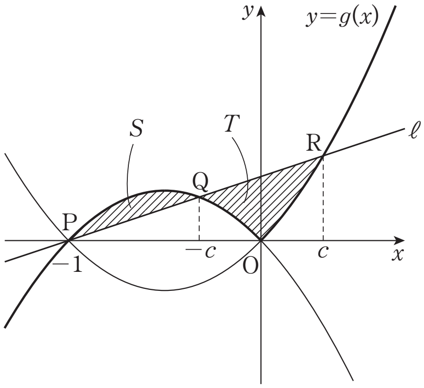
$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = cx + c \end{cases}$ より y を消去して整理すると

$x^2 + (-c+1)x - c = 0$　　$(x+1)(x-c) = 0$　　$x \geqq 0$ より $x = c$

よって，点 R の x 座標は $x = c$

$0 < c < 1$ のとき

線分 PQ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S は



$$S = \int_{-1}^{-c} \{(-x^2 - x) - (cx + c)\}\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{-c} \{x^2 + (c+1)x + c\}\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{-c} (x+1)(x+c)\, dx$$

$$= -\left[-\frac{1}{6}\{-c-(-1)\}^3 \right]$$

$$= \frac{1}{6}(-c+1)^3 = \frac{-c^3 + 3c^2 - 3c + 1}{6}$$

線分 QR と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 T は

$$T = \int_{-c}^{0} \{(cx+c) - (-x^2 - x)\}\, dx + \int_{0}^{c} \{(cx+c) - (x^2 + x)\}\, dx$$

$$= \int_{-c}^{c} (cx+c)\, dx - \int_{-c}^{0} (-x^2 - x)\, dx - \int_{0}^{c} (x^2 + x)\, dx$$

$$= \{(-c^2 + c) + (c^2 + c)\} \cdot 2c \cdot \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{-c} - \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{c}$$

$$= 2c^2 - \left(-\frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{2}c^2 \right) - \left(\frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{2}c^2 \right) = c^2$$

第4講　数　列

1　$a_1=1$

$a_{2n}=a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……①

$a_{2n+1}=a_n+a_{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……②

(1)　①で $n=1$ のとき，$a_2=a_1=1$

②で $n=1$ のとき，$a_3=a_1+a_2=1+1=2$

①で $n=2$ のとき，$a_4=a_2=1$

②で $n=2$ のとき，$a_5=a_2+a_3=1+2=3$

①で $n=3$ のとき，$a_6=a_3=2$

②で $n=3$ のとき，$a_7=a_3+a_4=2+1=3$

また，$a_{18}=a_9=a_4+a_5=1+3=4$

$a_{38}=a_{19}=a_9+a_{10}=a_9+a_5=4+3=7$

(2)　$a_{3\cdot 2^k}=a_{3\cdot 2^{k-1}}=a_{3\cdot 2^{k-2}}=\cdots\cdots=a_{3\cdot 2}=a_3=2$

(3)　2以上の自然数 k に対して

$$\sum_{j=1}^{k-1} 2^j=\frac{2(2^{k-1}-1)}{2-1}=2^k-2 \ (②)$$

よって，第 $(k-1)$ 群の最後の項までに (2^k-2) 個の項が存在し，また数列 $\{a_n\}$ の第3項以降を群に分けていることから，第 k 群の最初の項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $[2+\{(2^k-2)+1\}]$ 項，すなわち第 (2^k+1) 項である。また，第 k 群の最後の項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $\{2+(2^{k+1}-2)\}$ 項，すなわち第 2^{k+1} 項（③）である。

$S_1=a_3+a_4=2+1=3$

$S_2=a_5+a_6+a_7+a_8=a_5+a_6+a_7+a_4=3+2+3+1=9$

$T_2=a_5+a_7=3+3=6$

$U_2=a_6+a_8=2+1=3$

(4)　(3)より，第 $(k+1)$ 群の最初の項は $a_{2^{k+1}+1}$，最後の項は $a_{2^{k+2}}$ である。

$a_{2^{k+1}+1},\ a_{2^{k+1}+2},\ a_{2^{k+1}+3},\ \cdots\cdots,\ a_{2^{k+2}-1},\ a_{2^{k+2}}$

よって，①により

$U_{k+1}=a_{2^{k+1}+2}+a_{2^{k+1}+4}+\cdots\cdots+a_{2^{k+2}}$

$=a_{2(2^k+1)}+a_{2(2^k+2)}+\cdots\cdots+a_{2\cdot 2^{k+1}}$

$=a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots\cdots+a_{2^{k+1}}=S_k$ （⓪）

$(U_2=a_6+a_8=a_3+a_4=S_1)$

また，$a_{2^k}=a_{2^{k+1}}$ であることを用いると，②により

$T_{k+1}=a_{2^{k+1}+1}+a_{2^{k+1}+3}+a_{2^{k+1}+5}+\cdots\cdots+a_{2^{k+2}-1}$

$=(a_{2^k}+a_{2^k+1})+(a_{2^k+1}+a_{2^k+2})+(a_{2^k+2}+a_{2^k+3})+\cdots\cdots+(a_{2^{k+1}-1}+a_{2^{k+1}})$

$=(a_{2^{k+1}}+a_{2^k+1})+(a_{2^k+1}+a_{2^k+2})+(a_{2^k+2}+a_{2^k+3})+\cdots\cdots+(a_{2^{k+1}-1}+a_{2^{k+1}})$

$=2(a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+a_{2^k+3}+\cdots\cdots+a_{2^{k+1}})=2S_k$ （④）

$$\left(\begin{aligned}T_3&=a_9+a_{11}+a_{13}+a_{15}\\&=(a_4+a_5)+(a_5+a_6)+(a_6+a_7)+(a_7+a_8)\\&=(a_8+a_5)+(a_5+a_6)+(a_6+a_7)+(a_7+a_8)\\&=2(a_5+a_6+a_7+a_8)=2S_2\end{aligned}\right)$$

したがって，

$S_{k+1}=T_{k+1}+U_{k+1}=2S_k+S_k=3S_k$（⑧）

となる。よって，数列 $\{S_k\}$ は初項 $S_1=3$，公比 3 の等比数列であるから，

$S_k=3\cdot3^{k-1}=3^k$（⑨）

$T_{k+1}=2S_k=2\cdot3^k$ より，$T_k=2\cdot3^{k-1}$ ($k=1$ のときも成立)（⑤）

$U_{k+1}=S_k=3^k$ より，$U_k=3^{k-1}$ ($k=1$ のときも成立)（①）

2 〔１〕 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=5^n-1$ で表されるとき

$a_1=S_1=5^1-1=4$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)=5\cdot5^{n-1}-1\cdot5^{n-1}=(5-1)\cdot5^{n-1}=4\cdot5^{n-1}$

この式で $n=1$ のとき，$4\cdot5^0=4$ となり a_1 と一致する。

したがって，$a_n=4\cdot5^{n-1}$　($n=1$，2，3，……)

このとき，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{4\cdot5^{n-1}}=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{16}(1-5^{-n})$$

〔２〕 R_n および r_n について

$n=1$ のとき

図形 R_1 は縦の長さが 3，横の長さが 2 の長方形であり，3 枚のタイルを用いた図形 R_1 内の配置の総数は $r_1=3$ である。

$n=2$ のとき

図形 R_2 は縦の長さが 3，横の長さが 4 の長方形であり，6 枚のタイルを用いた図形 R_2 内の配置の総数は $r_2=11$ である。

(1) T_n および t_n について

$n=1$ のとき

図形 T_1 は図 1 である。4 枚のタイルを用いた図形 T_1 内の配置の総数 t_1 について考える。

図１　図２　図３　図４

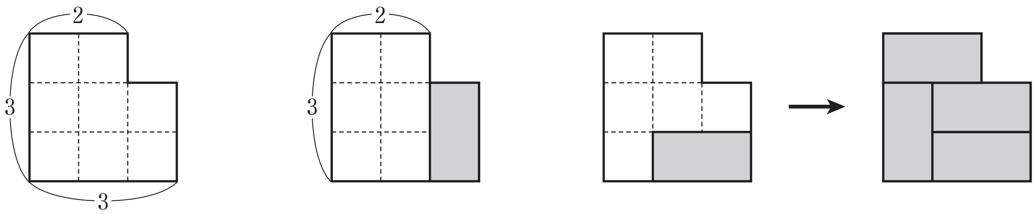


図２のように１枚のタイルを敷き詰めたとすると，図形 T_1 の残りの部分は図形 R_1 であり，残り３枚のタイルを用いた配置の総数は r_1 すなわち３通りである。

図３のように１枚のタイルを敷き詰めたとすると，残りの３枚のタイルを用いた配置は図４の１通りである。

よって，$t_1=3+1=4$

図形 T_n について

図５

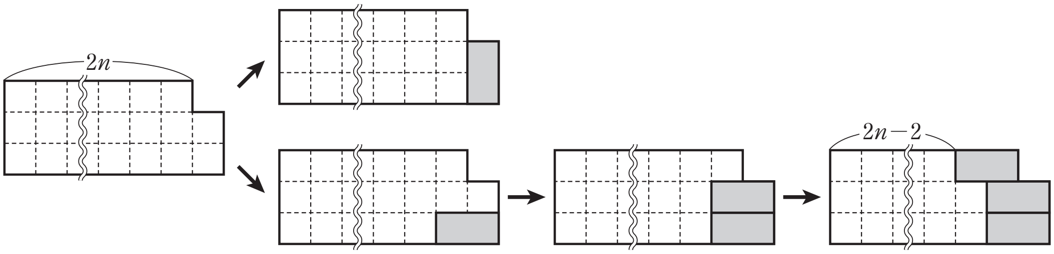


図６　図７　図８

図形 T_n の右下隅のタイルに注目すると，図５または図６の２通りの敷き方があり，この２通りですべてである。

図５のように１枚のタイルを敷き詰めたとすると，図形 T_n の残りの部分は図形 R_n であり，残り $3n$ 枚のタイルを用いた配置の総数は r_n 通りである。

図６・図７・図８のようにタイルを１枚ずつ，計３枚敷いたとすると，図８において図形 T_n の残りの部分は図形 T_{n-1} であり，残り $(3n-2)$ 枚，すなわち $\{3(n-1)+1\}$ 枚のタイルを用いた配置の総数は t_{n-1} 通りである。

よって，２以上の自然数 n に対して，$t_n=1\times r_n+1\times t_{n-1}=r_n+t_{n-1}$ が成り立つ。

以上より，$t_2=r_2+t_1=11+4=15$ であることがわかる。

図形 R_n において，右下隅のタイルに注目する

図９

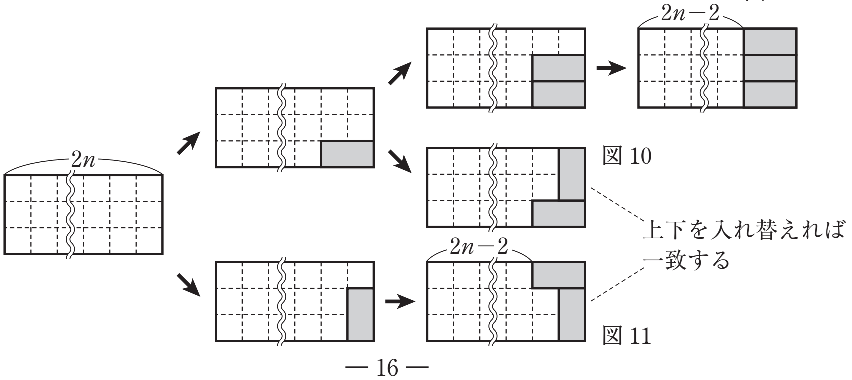


図10

図11

図 9〜11 のようにタイルを敷いた後の R_n の残りの部分について

図 9 は図 R_{n-1} であり，残りのタイルの配置の総数は r_{n-1} 通り

図 10，図 11 は図 T_{n-1} であり，残りのタイルの配置の総数は t_{n-1} 通り

である。よって，2 以上の自然数 n に対して，$r_n = r_{n-1} + 2t_{n-1}$ が成り立つ。

(2) 畳を縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形とみなすとき，縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形の部屋における畳の敷き詰め方の総数は，図形 R_3 内のタイルの配置の総数であり

$r_3 = r_2 + 2t_2 = 11 + 2 \cdot 15 = 41$

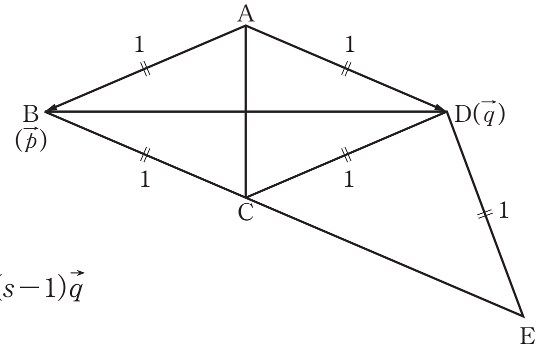
である。

また，縦の長さが 3，横の長さが 8 の長方形の部屋における畳の敷き詰め方の総数は，図形 R_4 内のタイルの配置の総数であり

$r_4 = r_3 + 2t_3 = r_3 + 2(r_3 + t_2) = 3r_3 + 2t_2 = 3 \cdot 41 + 2 \cdot 15 = 153$

である。

第５講　ベクトル



1　$\angle \mathrm{BAD} > 90^\circ$ より $\cos\angle \mathrm{BAD} < 0$

よって，$x = \vec{p}\cdot\vec{q} < 0$

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{q} - \vec{p}|^2$

$= |\vec{q}|^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{p}|^2$

$= 1 - 2x + 1$

$= 2 - 2x$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (\vec{p} + s\vec{q}) - \vec{q} = \vec{p} + (s-1)\vec{q}$

$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| = 1$ より $|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 = 1$

$|\vec{p} + (s-1)\vec{q}|^2 = 1^2$

$|\vec{p}|^2 + 2(s-1)\vec{p}\cdot\vec{q} + (s-1)^2|\vec{q}|^2 = 1$

$1 + 2x(s-1) + (s-1)^2 = 1$

$(s-1)(s-1+2x) = 0$　　　$s = 1,\ -2x+1$

点Ｅは点Ｃと異なる点であるので，$s \neq 1$　　　よって，$s = -2x+1$

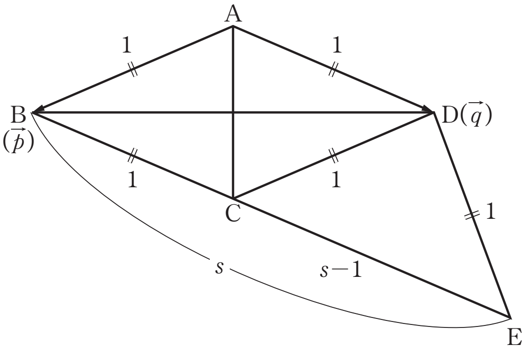
（参考）　実数 s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{p} + s\vec{q}$ と表したとき

$\mathrm{BC} : \mathrm{BE} = 1 : s$

$\mathrm{BC} = 1$ より，$\mathrm{BE} = s$，$\mathrm{CE} = s-1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CE}}$

$= \vec{p} + (s-1)\vec{q}$



(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = s\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-2x+1)\vec{q}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ より $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2$

$2 - 2x = (-2x+1)^2|\vec{q}|^2$

$2 - 2x = (-2x+1)^2$

$4x^2 - 2x - 1 = 0$　　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$　　$x < 0$ より $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$

したがって，(2)より

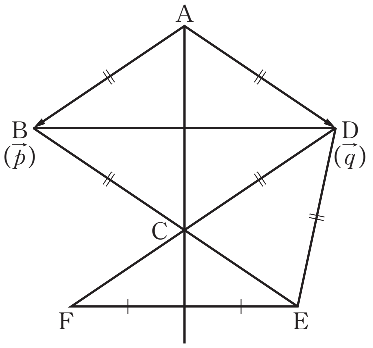
$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{p} + (-2x+1)\vec{q} = \vec{p} + \left(-2 \times \frac{1-\sqrt{5}}{4} + 1\right)\vec{q} = \vec{p} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}\quad \cdots\cdots①$$

(4)　x を(3)で求めた値，すなわち $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ とする。

点Ｆを直線ACに関して点Ｅと対称な点とし，点Ｂと点Ｄが直線ACに関して対称であることに注意すると，①でＥをＦに，$\vec{p}$ を $\vec{q}$ に，$\vec{q}$ を $\vec{p}$ におきかえることにより

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p} + \vec{q}$$

と表せる。したがって，



$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$

$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q}\right)-\left(\vec{p}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(\vec{p}-\vec{q})=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{DB}$

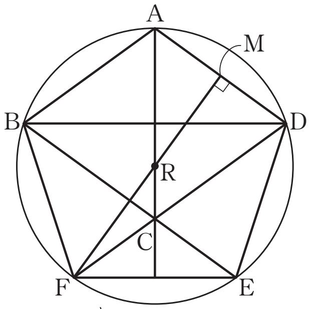
また，$|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{BE}|$ であり，(2)より $\overrightarrow{BE}=(-2x+1)\vec{q}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}$ であるから，

$|\overrightarrow{BD}|=\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}\right|=\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right||\vec{q}|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに

$|\overrightarrow{EF}|=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{DB}|=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1$

(5)　x を(3)で求めた値，すなわち $x=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ とする。



△ABD は AB＝AD を満たす二等辺三角形であるから，△ABD の外接円の中心 R は直線 AC 上にある。点 F を(4)で定めた点とし，線分 AD の中点を M とするとき，(4)の結果より，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{FM}$ は垂直であることが確かめられる。

$$\left(\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FM}&=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AF})\\&=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}\right)=\vec{q}\cdot\left\{\frac{1}{2}\vec{q}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q}\right)\right\}\\&=\vec{q}\cdot\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}\right)=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}-\frac{1}{2}|\vec{q}|^2\\&=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\end{aligned}\right)$$

よって，点 R は直線 AC と直線 FM の交点である。

点 R が直線 FM 上にあることから，実数 t を用いて

$\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AF}+(1-t)\overrightarrow{AM}=t\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q}\right)+(1-t)\cdot\frac{1}{2}\vec{q}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{p}+\frac{1+t}{2}\vec{q}$

と表すことができる。

また，点 R は直線 AC 上の点であるから，実数 u を用いて

$\overrightarrow{AR}=u\overrightarrow{AC}=u(\vec{p}+\vec{q})=u\vec{p}+u\vec{q}$

と表すことができる。$\vec{p}$ と $\vec{q}$ は1次独立であることから，

$\begin{cases}\frac{1+\sqrt{5}}{2}t=u\\ \frac{1+t}{2}=u\end{cases}$　より　$\frac{1+\sqrt{5}}{2}t=\frac{1+t}{2}$

よって，$t=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$u=\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ である。

したがって，$\overrightarrow{AR}=\frac{5+\sqrt{5}}{10}(\vec{p}+\vec{q})$ が得られる。

2 (1) $\overrightarrow{OA}=(-1,\ 2,\ 0)$ より

$|\overrightarrow{OA}|^2=(-1)^2+2^2+0^2=5$

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

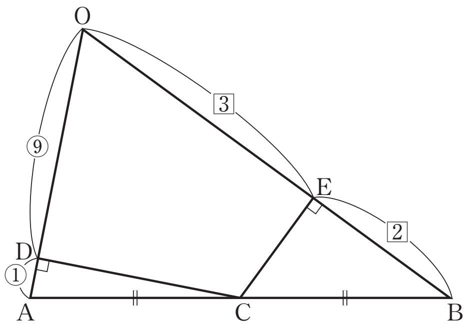
であることから

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OA}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

と表される。



$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CD}$ から $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=0$

$\dfrac{2}{5}|\overrightarrow{OA}|^2-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　　$\dfrac{2}{5}\cdot5-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$　……①

同様に

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{OB}$

であり，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CE}$ から $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ であることから，

$\overrightarrow{OB}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{OB}\right)=0$

$-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0$　　$-\dfrac{1}{2}\cdot4+\dfrac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0$

よって，$|\overrightarrow{OB}|^2=20$　……②

$\overrightarrow{OA}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ p,\ q)$ より

①から，$-2+2p=4$　　よって，$p=3$

②から，$2^2+p^2+q^2=20$　　$4+3^2+q^2=20$　　$q^2=7$　　$q>0$ から，$q=\sqrt{7}$

したがって，B の座標は $(2,\ 3,\ \sqrt{7})$ である。

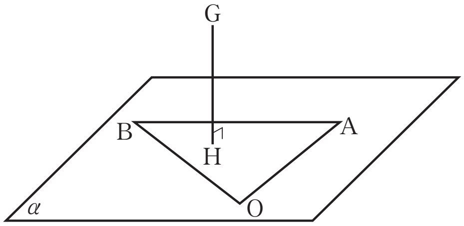
(2) 点 H が平面 α 上にあることから，実数 s，t を用いて

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

と表される。よって，

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=-\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

である。これと，$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ および $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つことから，



$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より

$(-\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$　……③

$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より

$(-\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$　……④

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=-1\cdot4+2\cdot4+0\cdot(-\sqrt{7})=4$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=2\cdot4+3\cdot4+\sqrt{7}\cdot(-\sqrt{7})=13$

よって，③，④より

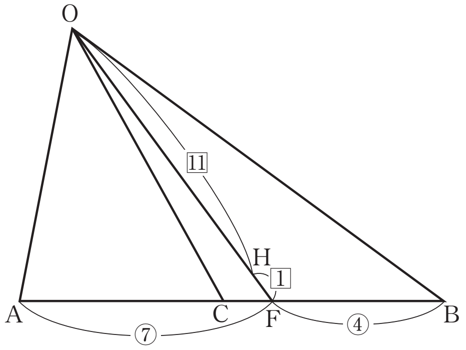
$\begin{cases}-4+5s+4t=0\\-13+4s+20t=0\end{cases}$　したがって，$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{7}{12}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\dfrac{4}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\dfrac{11}{12}\left(\dfrac{4}{11}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{7}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

したがって，線分 AB を 7：4 に内分する点を F とすると，点 H は線分 OF を 11：1 に内分する点である。



このことから，H は三角形 OBC の内部の点（①）である。

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。